



Corrigé examen de Logique Mathématique 2023 durée 1h40

Compréhension (7.5pts)

Mettre les parenthèses à l'expression suivantes : (1.5pts)

$$a \leftrightarrow b \rightarrow (-c) \vee a \leftrightarrow b \rightarrow a \rightarrow d \rightarrow c \wedge b \wedge d \vee (\neg a) \vee b$$

$$a \leftrightarrow b \rightarrow (-c) \vee a \leftrightarrow b \rightarrow a \rightarrow d \rightarrow (c \wedge b) \wedge d \vee (\neg a) \vee b$$

$$a \leftrightarrow b \rightarrow (-c) \vee a \leftrightarrow b \rightarrow a \rightarrow d \rightarrow ((c \wedge b) \wedge d) \vee (\neg a) \vee b$$

$$a \leftrightarrow b \rightarrow ((-c) \vee a) \leftrightarrow b \rightarrow a \rightarrow d \rightarrow ((c \wedge b) \wedge d) \vee ((\neg a) \vee b)$$

$$a \leftrightarrow (b \rightarrow ((-c) \vee a)) \leftrightarrow b \rightarrow a \rightarrow (d \rightarrow ((c \wedge b) \wedge d) \vee ((\neg a) \vee b))$$

$$a \leftrightarrow (b \rightarrow ((-c) \vee a)) \leftrightarrow b \rightarrow (a \rightarrow (d \rightarrow ((c \wedge b) \wedge d) \vee ((\neg a) \vee b)))$$

$$a \leftrightarrow (b \rightarrow ((-c) \vee a)) \leftrightarrow (b \rightarrow (a \rightarrow (d \rightarrow ((c \wedge b) \wedge d) \vee ((\neg a) \vee b))))$$

$$a \leftrightarrow (b \rightarrow ((-c) \vee a)) \leftrightarrow (b \rightarrow (a \rightarrow (d \rightarrow ((c \wedge b) \wedge d) \vee ((\neg a) \vee b))))$$

$$a \leftrightarrow ((b \rightarrow ((-c) \vee a)) \leftrightarrow (b \rightarrow (a \rightarrow (d \rightarrow ((c \wedge b) \wedge d) \vee ((\neg a) \vee b))))))$$

Traduire en logique propositionnelle : (2pts)

Pour que je puisse faire un bon gâteau, de la bonne levure ne **suffit** pas, il **faut** aussi une bonne farine et de bons œufs.

$$\neg (\text{Levure} \rightarrow \text{Gâteau}) \wedge (\text{Gâteau} \rightarrow (\text{Levure} \wedge \text{Farine} \wedge \text{Œufs}))$$

لكي أصنع كعكة جيدة ، لا تكفي الخميرة الجيدة ، فأنت بحاجة أيضًا إلى دقيق جيد وبيض جيد

Traduire en logique des prédicats : (2+2 pts)

« لا يؤمن أحدكم حتى يحب لأخيه ما يحب لنفسه »

$$\neg \text{Sait}(X, a) \rightarrow \exists b (\text{Sait}(X, b) \vee \neg \text{Sait}(X, b))$$

الذي لا يعرف شيئاً قد يعرف شيئاً آخر

$$M(X) \rightarrow \forall a (\text{Aime}(X, X, a) \rightarrow \text{Aime}(X, \text{Frère}(X), a))$$

Preuve

Prouver avec Hilbert : (7.5pts) (2.5+2.5+2.5 pts)

- $((p \wedge q) \rightarrow r) \rightarrow ((p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r))$



1) $(p \vee q) \rightarrow r$ hyp
 2) $p \rightarrow (p \vee q)$ disjunction - a
 3) $q \rightarrow (p \vee q)$ " - b
 4) $p \rightarrow r$ transitivité (2 et 1)
 5) $q \rightarrow r$ " (3 et 1)
 6) $(p \rightarrow r) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow ((p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)))$
 7) $(q \rightarrow r) \rightarrow ((p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r))$ MP (6, 4)
 8) $(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$ MP (7, 5)

- $(\neg a \vee b) \rightarrow (a \rightarrow b)$

1) $\neg a \rightarrow (a \rightarrow b)$ ex 3, c
 2) $b \rightarrow (a \rightarrow b)$ ax 1
 3) $(\neg a \rightarrow (a \rightarrow b)) \rightarrow [(b \rightarrow (a \rightarrow b)) \rightarrow (\neg a \vee b) \rightarrow (a \rightarrow b)]$ disjunction - c
 4) $[b \rightarrow (a \rightarrow b)] \rightarrow [(\neg a \vee b) \rightarrow (a \rightarrow b)]$ MP 3, 2
 5) $(\neg a \vee b) \rightarrow (a \rightarrow b)$ MP 4, 1

- $(a \rightarrow b) \rightarrow (\neg a \vee b)$

1) $a \rightarrow b$ hyp
 2) $(\neg a \rightarrow (\neg a \vee b)) \rightarrow [a \rightarrow (\neg a \vee b) \rightarrow ((\neg a \vee a) \rightarrow (\neg a \vee b))]$ disjunctio - a
 3) $b \rightarrow (\neg a \vee b)$ disj - b
 4) $a \rightarrow (\neg a \vee b)$ transitivité 1 et 3
 5) $\neg a \rightarrow (\neg a \vee b)$ disj - a
 6) $(a \rightarrow (\neg a \vee b)) \rightarrow ((\neg a \vee a) \rightarrow (\neg a \vee b))$ MP 5+2
 7) $(\neg a \vee a) \rightarrow (\neg a \vee b)$ MP 6+4
 8) $\neg a \vee a$ tiers exclus
 9) $\neg a \vee b$ MP 7+8



Prouver avec les séquents, puis avec les tableaux sémantiques et donner les contre-modèles s'il y en a : (5pts) (2.5+2.5 pts)

- $((a \wedge \neg b) \rightarrow (a \vee b)) \rightarrow (a \rightarrow (b \rightarrow \neg c))$

