

*Université Amar Telidji Laghouat Faculté des Sciences Département d’Informatique*

*Examen de logique mathématique horaire 11h00 durée 1h45*

*(Pas de documentation)*

**Exercice 1** :

1. Dessiner l’arbre syntaxique de A. (**2pts**)

2. Donner toutes les sous-formules. (**2pts**)

SF(A)={ ,p,q,r}

3. Dites si elle est valide, satisfiable, ou insatisfiable ? (**2pts**)

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| p | q | r | p → q | p ∧ r | ¬(p ∧ r) | q ∨r | ¬(p ∧ r) ∨ q ∨r | A |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | **1** |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | **1** |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | **1** |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | **1** |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | **0** |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | **0** |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | **1** |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | **1** |

A n’est pas valide car elle possède des contremodèles. A est satisfiable car elle possède au moins un modèle. A n’est pas insatisfiable car elle possède des modèles.

4. Soit E={A,B},où B=p →(q →r), E est-t-il satisfiable ? (**2pts**)

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| p | q | r | A | B | AB |
| 0 | 0 | 0 | **1** | **1** | **1** |
| 0 | 0 | 1 | **1** | **1** | **1** |
| 0 | 1 | 0 | **1** | **1** | **1** |
| 0 | 1 | 1 | **1** | **1** | **1** |
| 1 | 0 | 0 | **0** | **1** | **0** |
| 1 | 0 | 1 | **0** | **1** | **0** |
| 1 | 1 | 0 | **1** | **0** | **0** |
| 1 | 1 | 1 | **1** | **1** | **1** |

E est satisfiable car il possède au moins un modèle.

5. Réécrire A en forme normale conjonctive. (**2pts**)

FNC(A)=¬(FND(¬A))=¬((pΛ¬qΛ¬r)ν(pΛ¬qΛr))=(¬pνqνr)Λ(¬pνqν¬r)

**Exercice 2** : Prouver que les expressions suivantes sont valides ou invalide si c’est possible :

Avec le système à la Hilbert :

* (**3.5 pts**)

1. a→bνa disjonction-b
2. b→bνa disjonction-a
3. (a→(bνa))→((b→(bνa))→((aνb)→(bνa))) raisonnement par cas
4. (b→(bνa))→((aνb)→(bνa)) mp(3,1)
5. (aνb)→(bνa) mp(4,2)

* (**3.5 pts**)

1. aΛb hyp
2. aΛb→a conjonction-a
3. aΛb→b conjonction-b
4. a mp(2,1)
5. b mp(3,1)
6. b→(a→(bΛa)) conjonction-c
7. a→(bΛa) mp(6,5)
8. bΛa mp(7,4)

* **(5pts)**

1. (a→b)Λ(b→c) hyp
2. ((a→b)Λ(b→c))→(a→b) conjonction-a
3. ((a→b)Λ(b→c))→(b→c) conjonction-b
4. a→b mp(2,1)
5. b→c mp(3,1)
6. a→c exo1 n°2 transitivité

Avec les séquents :

* (**3 pts**)

,p

,p

,p

,p

,p

D est valide

* **(5 pts)**

E n’est pas valide.

**Remarque** : C et E sont pour le test.