*Université Amar Telidji Laghouat Faculté des Sciences Département d’Informatique*

*Examen de logique mathématique horaire 11h00 durée 1h45*

*(Pas de documentation)*

**Exercice 1** :

$$A=(p \rightarrow q)\leftrightarrow (¬(p ∧ r) ∨ q ∨r)$$

1. Dessiner l’arbre syntaxique de A. (**2pts**)

$$\leftrightarrow $$

$$\rightarrow $$

$$∨$$

$$p$$

$$q$$

$$¬$$

$$∨$$

$$∧$$

$$q$$

$$r$$

$$p$$

$$r$$

2. Donner toutes les sous-formules. (**2pts**)

SF(A)={$ \left(p \rightarrow q\right)\leftrightarrow \left(¬\left(p ∧ r\right)∨ q ∨r\right), \left(p \rightarrow q\right), \left(¬\left(p ∧ r\right)∨ q ∨r\right), ¬\left(p ∧ r\right), \left(q ∨r\right),$ $(p ∧ r)$,p,q,r}

 3. Dites si elle est valide, satisfiable, ou insatisfiable ? (**2pts**)

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| p | q | r | p → q | p ∧ r | ¬(p ∧ r) | q ∨r | ¬(p ∧ r) ∨ q ∨r | A |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | **1** |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | **1** |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | **1** |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | **1** |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | **0** |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | **0** |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | **1** |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | **1** |

A n’est pas valide car elle possède des contremodèles. A est satisfiable car elle possède au moins un modèle. A n’est pas insatisfiable car elle possède des modèles.

4. Soit E={A,B},où B=p →(q →r), E est-t-il satisfiable ? (**2pts**)

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| p | q | r | A | B | A$∧$B |
| 0 | 0 | 0 | **1** | **1** | **1** |
| 0 | 0 | 1 | **1** | **1** | **1** |
| 0 | 1 | 0 | **1** | **1** | **1** |
| 0 | 1 | 1 | **1** | **1** | **1** |
| 1 | 0 | 0 | **0** | **1** | **0** |
| 1 | 0 | 1 | **0** | **1** | **0** |
| 1 | 1 | 0 | **1** | **0** | **0** |
| 1 | 1 | 1 | **1** | **1** | **1** |

E est satisfiable car il possède au moins un modèle.

5. Réécrire A en forme normale conjonctive. (**2pts**)

FNC(A)=¬(FND(¬A))=¬((pΛ¬qΛ¬r)ν(pΛ¬qΛr))=(¬pνqνr)Λ(¬pνqν¬r)

**Exercice 2** : Prouver que les expressions suivantes sont valides ou invalide si c’est possible :

Avec le système à la Hilbert :

* $A=a⋁b\rightarrow b∨a$ (**3.5 pts**)
1. a→bνa disjonction-b
2. b→bνa disjonction-a
3. (a→(bνa))→((b→(bνa))→((aνb)→(bνa))) raisonnement par cas
4. (b→(bνa))→((aνb)→(bνa)) mp(3,1)
5. (aνb)→(bνa) mp(4,2)
* $B=a∧b\rightarrow b∧a$ (**3.5 pts**)
1. aΛb hyp
2. aΛb→a conjonction-a
3. aΛb→b conjonction-b
4. a mp(2,1)
5. b mp(3,1)
6. b→(a→(bΛa)) conjonction-c
7. a→(bΛa) mp(6,5)
8. bΛa mp(7,4)
* $C=(\left(a\rightarrow b\right)∧\left(b\rightarrow c\right))\rightarrow (a\rightarrow c)$ **(5pts)**
1. (a→b)Λ(b→c) hyp
2. ((a→b)Λ(b→c))→(a→b) conjonction-a
3. ((a→b)Λ(b→c))→(b→c) conjonction-b
4. a→b mp(2,1)
5. b→c mp(3,1)
6. a→c exo1 n°2 transitivité

Avec les séquents :

* $D=((p∧q)\rightarrow r)\rightarrow (\left(¬p∨q\right)\rightarrow \left(p\rightarrow r\right))$ (**3 pts**)

$$⊢((p∧q)\rightarrow r)\rightarrow (\left(¬p∨q\right)\rightarrow \left(p\rightarrow r\right))$$

$$((p∧q)\rightarrow r)⊢(\left(¬p∨q\right)\rightarrow \left(p\rightarrow r\right))$$

$$\left(\left(p∧q\right)\rightarrow r\right),\left(¬p∨q\right)⊢\left(p\rightarrow r\right)$$

$$\left(\left(p∧q\right)\rightarrow r\right),\left(¬p∨q\right),p⊢r$$

$$\left(\left(p∧q\right)\rightarrow r\right),¬p,p⊢r$$

$$\left(\left(p∧q\right)\rightarrow r\right),q,p⊢r$$

$\left(\left(p∧q\right)\rightarrow r\right),p⊢r$,p

$p⊢r$,p$, p∧q$

$r,p⊢r$,p

$p⊢r$,p$, p$

$p⊢r$,p$, q$

$$r⊢r$$

$$p⊢p$$

$$p⊢p$$

$$r,q,p⊢r$$

$$q,p⊢p∧q,r$$

$$q,p⊢p,r$$

$$q,p⊢q,r$$

$$q⊢q$$

$$p⊢p$$

$$r⊢r$$

D est valide

* $E=(p\rightarrow \left(q\rightarrow r\right))\rightarrow (r∨¬p)$ **(5 pts)**

$$⊢(p\rightarrow \left(q\rightarrow r\right))\rightarrow (r∨¬p)$$

$$(p\rightarrow \left(q\rightarrow r\right))⊢(r∨¬p)$$

$$(p\rightarrow \left(q\rightarrow r\right))⊢(r,¬p)$$

$$\left(p\rightarrow \left(q\rightarrow r\right)\right),p⊢r$$

$$p⊢r, q\rightarrow r$$

$$p⊢r,p$$

$$p,q⊢r, r$$

$$p,q⊢r$$

$$p⊢p$$

E n’est pas valide.

**Remarque** : C et E sont pour le test.