Logique Propositionnelle

2iéme année Lc. Inf.

Proposition

- Il pleut (F)
- 2^3=8 (V)
- 18<10 (F)

La syntaxe du langage propositionnel

- **L’alphabet** Un ensemble dénombrable de variables propositionnelles. On convient d’utiliser les lettres de l’alphabet latin (a, b, c ...) éventuellement indicées.
- Des **connecteurs** logiques($\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$) . Cette liste n’est pas exhaustive.
- Des **symboles** auxiliaires (,).
- Les **constantes** : T et $\perp$ représentant respectivement le *vrai* et le *faux ou encore 1 et 0*.

Les règles d’écriture

Les règles d’écriture précisent la manière dont sont assemblés les symboles de l’alphabet pour former des expressions bien formées (ou formules) du langage propositionnel :

- Toute variable propositionnelle est une formule;
- Si α est une formule, $\neg\alpha$ est une formule;
- Si α et β sont des formules, $(\alpha \wedge \beta)$, $(\alpha \vee \beta)$, $(\alpha \Rightarrow \beta)$ et $(\alpha \Leftrightarrow \beta)$ sont des formules;

Les règles d'écriture

- Exemple: p, q, r sont des variables propositionnelles, donc des formules.
- $p \vee q$ est une formule.
- $p \Rightarrow (q \neg r)$ n'est pas une formule.

Priorité des connecteurs

- Les connecteurs sont appliqués dans l'ordre suivant : $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$

Priorité des connecteurs

Exemple:

- $\neg p \wedge q$ se lit $(\neg p) \wedge q$.
- $p \wedge q \Rightarrow r$ se lit $(p \wedge q) \Rightarrow r$.
- $p \vee q \wedge r$ se lit $p \vee (q \wedge r)$.
- $p \vee q \vee r$ se lit $(p \vee q) \vee r$

Sémantique d'un langage propositionnel

L'étude sémantique d'un langage pour le calcul des propositions a pour but de donner une valeur de vérité aux formules du langage.

Elle est aussi appelée la théorie des modèles. La sémantique associe une fonction de valuation unique à chacun des connecteurs logiques.

$$V : vp \longrightarrow \{1,0\},$$

(où vp est l'ensemble des variables propositionnelles, 1 signifie vrai et 0 signifie faux)

Table de vérité (ou tableau de vérité)

- Le graphe de cette fonction est défini par une table de vérité à 2^n lignes représentant la valeur de vérité de α correspondant à chaque combinaison de valeur de vérité des n variables (appelées aussi distribution de valeurs de vérité des variables).

Interprétation

2 variables donc 4 interprétations

I(a)	I(c)	I(¬a⇒¬c)
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

- Toute formule avec n variables admet 2^n interprétations. La valeur de vérité associé par l'interprétation I à une formule A dépend uniquement des valeurs de vérité associés par I à chacune des variables de A.

Interprétation

- On dit qu'une interprétation I satisfait une formule A, lorsque I(A)=1(est appelée aussi modèle), et on dit qu'elle falsifie A si I(A)=0.

La négation

- La négation d’une proposition a notée ¬a est définie de la manière suivante : Si la proposition a est vraie alors ¬a est fausse. Si la proposition a est fausse alors ¬a est vraie.

a	$\overline{a}$
1	0
0	1

La conjonction

- La conjonction de deux propositions a et b notée symboliquement par a ∧ b et se lit (a et b) est vraie si et seulement si les deux propositions a et b sont vraies simultanément.

a	b	$a \wedge b$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

La disjonction

- La disjonction de deux propositions a et b notée symboliquement par a V b et se lit (a ou b) est fausse si et seulement si les deux propositions a et b sont fausses simultanément.
- (ou inclusif)

a	b	$a \vee b$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

L'implication

- Le connecteur "$\Rightarrow$" est appelé le connecteur d'implication, la proposition $a \Rightarrow b$ est fausse dans le cas où a est vraie et b est fausse.

a	b	$a \Rightarrow b$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

L’implication

Soient a et b deux propositions, dans la formule a $\Rightarrow$ b, a est appelée l’hypothèse (ou antécédent) et b la thèse (ou la conséquence). (a $\Rightarrow$ b) est appelée implication directe. Les implications apparentes à l’implication directe sont dénommées ainsi :

- a $\Rightarrow$ b implication directe, ici a est une condition suffisante pour b (b si a).
- b $\Rightarrow$ a implication réciproque (converse), ici a est une condition nécessaire de b.
- a $\Rightarrow$ b implication contraire (inverse).
- b $\Rightarrow$ a implication contraposée.

L’équivalence

- Le connecteur "⇔" est appelé le connecteur d’équivalence, la proposition a ⇔ b est vraie dans le cas où a et b ont la même valeur de vérité.

a	b	$a \Leftrightarrow b$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Autres

- XOR $\bigoplus$ (ou exclusif):ex: Pepsi ou Coca
- NOR $\downarrow$ on note$(a\downarrow b)$ ou (a NOR b) ou$\neg(a\vee b)$
- NAND | on note$(a|b)$ ou(a NAND b)ou$\neg(a\wedge b)$
- …

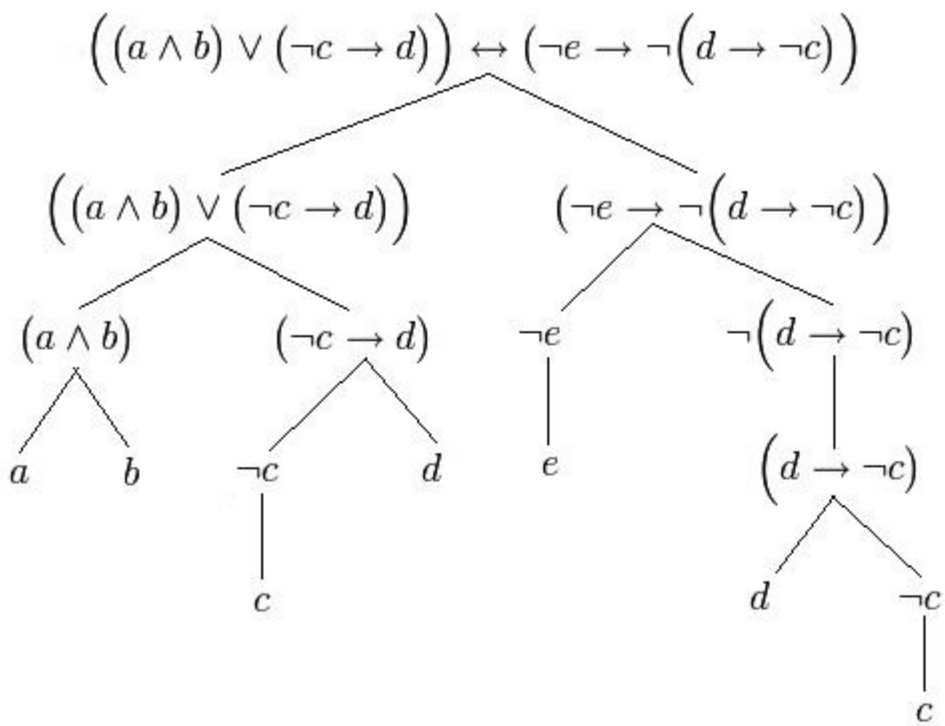
exo

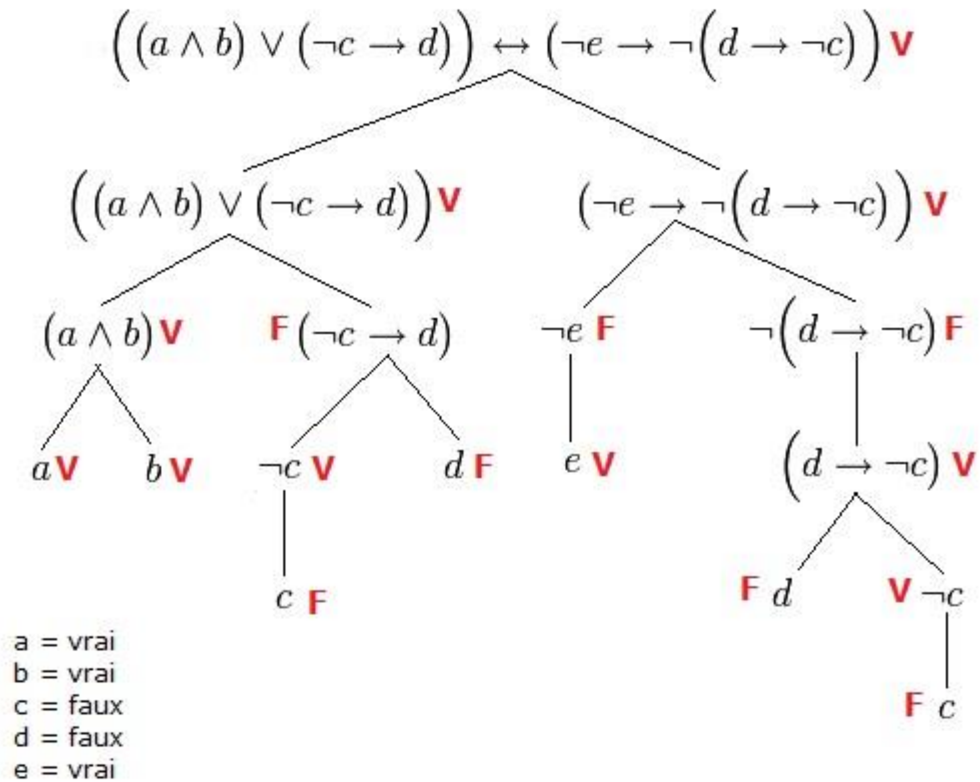
- Soit α la formule $p \vee q \Rightarrow r$ donner sa table de vérité.

p	q	r	$p \vee q$	α
1	1	1	1	1
1	1	0	1	0
1	0	1	1	1
1	0	0	1	0
0	1	1	1	1
0	1	0	1	0
0	0	1	0	1
0	0	0	0	1

Arbre syntaxique

- Méthode pour vérifier **si une expression est bien formée.** Pour cela, on décompose l'énoncé grâce à un arbre syntaxique. On obtient, après décomposition, chaque atome présent dans l'énoncé initial ; aucun connecteur n'est resté : l'énoncé est donc bien une *e.b.f.*.




$\Big((a \wedge b) \vee (\neg c \rightarrow d)\Big) \leftrightarrow \Big(\neg e \rightarrow \neg\big(d \rightarrow \neg c\big)\Big)$ V
$\Big((a \wedge b) \vee (\neg c \rightarrow d)\Big)$ V
$\Big(\neg e \rightarrow \neg\big(d \rightarrow \neg c\big)\Big)$ V
$(a \wedge b)$ V
F $(\neg c \rightarrow d)$
$\neg e$ F
$\neg\big(d \rightarrow \neg c\big)$ F
a V
b V
$\neg c$ V
d F
e V
$\big(d \rightarrow \neg c\big)$ V
c F
F d
V $\neg c$
F c
a = vrai
b = vrai
c = faux
d = faux
e = vrai

Sous formule

- Etant donnée une formule logique ´ A, l’ensemble de ses sous-formules est donné par la fonction sf(A), définie inductivement comme suit :
- – Si A est atomique, sf(A) = {A}.
- – Si A est de la forme ¬B, alors sf(A) = {A} ∪ sf(B).
- – Si A est de la forme B ∨ C, B ∧ C, B ⇒ C ou B ⇔ C, alors sf(A) = {A} ∪ sf(B) ∪ sf(C).
- Par exemple, SF(p ⇒(¬q^r)) ={p,q,r,¬q,¬q^r,p ⇒(¬q^r)}.

Satisfiabilité

- Une formule α est dite <u>satisfiable</u> si et seulement si sa table de vérité contient au moins une ligne où la valeur de vérité de α est vraie (ouV(α) = 1).
- α est dite <u>insatisfiable</u> si elle est fausse sur toutes les lignes de sa table de vérité.

Satisfiabilité d'un ensemble de formules

- On généralise la notion de satisfiabilité à un ensemble de formules : Soit $\Gamma = \{\alpha 1, \alpha 2, ..., \alpha n\}$un ensemble de formules.
- Γ(Gamma)est dit satisfiable si et seulement si étant donné la table devérité de toutes les formules $\alpha 1, \alpha 2, ..., \alpha n$, il existe au moins une ligne où toutes ces formules sont vraies simultanément. La satisfiabilité d'un ensemble de formules est assimilée à la conjonction de toutes ses formules.

Satisfiabilité d'un ensemble de formules

Exemple :

- L'ensemble $\{p \wedge q, p \vee q, p \Rightarrow q\}$ est satisfiable.
- L'ensemble $\{p \wedge q, p \vee q, \neg p\}$ est insatisfiable.

Tautologie

Une formule α est une tautologie (on note |= α), si et seulement si α est vraie sur toutes les lignes de sa table de vérité.

- Exemple: la formule a∧b ⇒ b est une tautologie.

a	b	$a \wedge b$	$a \wedge b \Rightarrow b$
1	1	1	1
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	0	1

- Remarque Si|= α ⇒ β, on dit que α implique logiquement β.
- Si|= α ⇔ β, on dit que α est logiquement équivalente à β et on note α ≡ β.

Tautologie

- Lemme 1. Une formule α est une tautologie si et seulement si ¬α est insatisfiable.
- Démonstration. Supposons que|= α mais ¬α est satisfiable. Donc,il existe au moins une ligne de la table de vérité où ¬α est vraie. Pour cette ligne, α est fausse mais |= α. Alors ¬α est insatisfiable.
- Supposons maintenant que ¬α est insatisfiable mais α n’est pas une tautologie. Donc, il existe au moins une ligne de la table de vérité où α est fausse. Pour cette ligne, ¬α doit être vraie ce qui contredit le fait que ¬α est insatisfiable.

Tautologie

- Théorème Si $|= \alpha$ et $|= \alpha \Rightarrow \beta$, alors $|= \beta$.
- Démonstration. Procédons par absurde. Supposons que $|= \alpha$ et $|= \alpha \Rightarrow \beta$, mais $\not\models \beta$. Donc, il existe au moins une ligne où β est fausse. Pour cette ligne, $\alpha \Rightarrow \beta$ est fausse car $|= \alpha$. Contradiction avec le fait que $| = \alpha \Rightarrow \beta$.

Antilogie

- Une **antilogie** est un formule dont la table de vérité ne comporte que des 0 ex : $A \wedge \neg A$

Lois De Morgane

- $\neg(a \land b) \equiv \neg a \lor \neg b$
- $\neg(a \lor b) \equiv \neg a \land \neg b$

Absorption

- $a \wedge a \equiv a$
- $a \vee a \equiv a$

Commutativité & Distributivité

- Commutativité
- $P \land Q \Rightarrow Q \land P$
- $P \lor Q \Rightarrow Q \lor P$

- Distributivité
- $P \lor (Q \land R) \Rightarrow (P \lor Q) \land (P \lor R)$
- $P \land (Q \lor R) \Rightarrow (P \land Q) \lor (P \land R)$

Conséquence logique

- En langage propositionnel, une formule β est conséquence logique d'une formule α (et on note α |= β), si et seulement si étant donné la table de vérité de α et β, la valeur de vérité de β est vraie sur toutes les lignes où la valeur de vérité de α est vraie.

Conséquence logique

- De manière générale, une formule β est conséquence logique d'un ensemble de formules $\Gamma = \{\alpha 1, \alpha 2, ..., \alpha n\}$ (et on note $\Gamma \models \beta$ ou encore $\alpha 1, \alpha 2, ..., \alpha n \models \beta$) si et seulement si étant donné la table de vérité des formules $\alpha 1, \alpha 2, ..., \alpha n, \beta$, la valeur de vérité de β est vraie sur toutes les lignes où les formules $\alpha 1 \alpha 2 \ldots \alpha n$ sont vraie simultanément.

Equivalence semantique

- On utilise plusieurs connecteurs booléens mais il y a des équivalences entre ces connecteurs. On écrira $P \equiv Q$ si $P \vDash Q$ et $Q \vDash P$ ce qui revient aussi à dire que les valeurs de vérité de P et Q coïncident pour toute interprétation (i.e. $\forall\, I \in V_p \rightarrow \mathrm{B}$, $\mathrm{val}(I,P)=\mathrm{val}(I,Q)$).

FND (Forme Normale Disjonctive)

- F: aVb⇒c

a	b	c	aVb	F
0	0	0	0	1
0	0	1	0	1
0	1	0	1	0
0	1	1	1	1
1	0	0	1	0
1	0	1	1	1
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

- FND:

(¬a∧¬b∧¬c)V(¬a∧¬b∧c)V(¬a∧b∧c)V(a∧¬b∧c)V(a∧b∧c)

FNC (Forme Normale Conjonctive)

- FNC(F)= ¬(FND(¬F))
- FND(¬F):

(¬a∧b∧¬c)V (a∧¬b∧¬c)V

(a∧b∧¬c)

- FNC:

(aV¬bVc)∧(¬aVbVc)∧

(¬aV¬bVc)

a	b	c	aVb	F	¬F
0	0	0	0	1	0
0	0	1	0	1	0
0	1	0	1	0	1
0	1	1	1	1	0
1	0	0	1	0	1
1	0	1	1	1	0
1	1	0	1	0	1
1	1	1	1	1	0

Substitution dans une formule

- Soit: $p = z \vee \neg y$
- $(x \wedge (\neg x \wedge y))[x/p] = (z \vee \neg y) \wedge (\neg (z \vee \neg y) \wedge y)$

Substitution simultanée

- Soient:
- $p1 = (y1 \land \neg y2)$
- $p2 = (z1 \lor (z2 \land z3))$
- on a:
- $(x1 \land x2)[x1/p1, x2/p2] = (y1 \land \neg y2) \land (z1 \lor (z2 \land z3))$

Exercices

- Soit la formule P: $(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (r \vee \neg p)$.
- Donner la table de vérité de la formule P.
- Dire si la formule est valide, satisfiable, insatisfiable?
- La formule P a-t-elle un modèle? si oui lequel?
- Donner la forme normale conjonctive et la forme normale disjonctive de la formule P.