Déduction naturelle

En logique mathématique, la **déduction naturelle** est un système formel où les règles de déduction des démonstrations sont proches des façons naturelles de raisonner. C'est une étape importante de l'histoire de la théorie de la démonstration pour plusieurs raisons :

- contrairement aux systèmes à la Hilbert fondés sur des listes d'axiomes logiques plus ou moins ad hoc, la **déduction naturelle** repose sur un principe systématique de symétrie : pour chaque connecteur, on donne une paire de règles duales (introduction/élimination) ;
- elle a conduit Gentzen à inventer un autre formalisme très important en théorie de la démonstration, encore plus « symétrique » : le calcul des séquents ;
- elle a permis dans les années 1960 d'identifier la première instance de l'isomorphisme de Curry-Howard.

La terminologie « *déduction naturelle* » a été suggérée, par Gentzen , eu égard à l'aspect peu intuitif des systèmes à la Hilbert.

La **déduction naturelle**, dans sa forme actuelle, est un système formel proposé par Gerhard Gentzen en 1934.

De nombreux logiciens, à commencer par Gottlob Frege et David Hilbert mais également Bertrand Russell et Alfred North Whitehead avec leurs *Principia Mathematica*, ont développé la logique sous une forme axiomatique inspirée par la méthode euclidienne : les lois logiques sont déduites à partir d'axiomes en utilisant essentiellement la règle de *modus ponens*. Cette méthode simple a révélé des difficultés liées au fait que les raisonnements sous hypothèses, pratique pourtant courante en mathématiques, ne sont pas directement représentables .

Gerhard Gentzen est le premier à avoir développé des formalismes qui en abandonnant partiellement la méthode euclidienne, redonnent à la logique le caractère d'un cheminement naturel, c'est-à-dire se rapprochant mieux de la pratique mathématique. La principale idée de Gentzen était simple : remplacer les axiomes logiques nécessaires mais peu naturels des systèmes à la Hilbert par des règles de déduction comme l'*introduction de la flèche* qui code formellement le fait de « poser une hypothèse » dans le cours d'un raisonnement. Ce faisant Gentzen a développé pour la première fois une présentation très symétrique de la logique dans laquelle chaque connecteur est défini par une paire de règles duales : les *introductions* et les *éliminations*. Il a également développé un formalisme où les déductions ne sont pas des suites de phrases mais des arbres (ou plus précisément des graphes orientés acycliques). Cette méthode, très suggestive pour l'intuition, a conduit Gentzen à faire de belles découvertes mais elle nuit à l'idée originale qui était de reproduire les formes naturelles de raisonnement. Fitch a modifié la méthode de Gentzen en introduisant une notation fondée sur l'indentation pour représenter astucieusement la structure arborescente des déductions. Cette représentation à la fois formelle et plus naturelle n'est toutefois pas la mieux adaptée pour obtenir les résultats principaux de la déduction naturelle comme la normalisation.

Dans les années 1960, Dag Prawitz a poursuivi l'étude de la déduction naturelle et y a démontré un théorème d'élimination des coupures .

Notion de règle

La déduction naturelle est fondée sur des règles d'inférence qui permettent de déduire des théorèmes à partir d'autres. Par exemple la règle suivante, le *modus ponens* mais que l'on appelle *élimination de la flèche* dans ce contexte :

$$\frac{p \qquad p \to q}{q}$$

permet de déduire q à partir d'une démonstration de p et d'une démonstration de $p \to q$. Les formules au-dessus de la barre s'appellent les *prémisses* et la formule sous la barre s'appelle la *conclusion*. Dans l'exemple, p et $p \to q$ sont les prémisses et q est la conclusion.

Notion d'arbre de preuve

Une démonstration en déduction naturelle est un arbre de preuve. Voici un arbre de preuve déduisant l'énoncé *le sol est glissant* des trois hypothèses : (1) *il pleut*, (2) *s'il pleut alors le sol est mouillé* et (3) *si le sol est mouillé alors le sol est glissant* :

$$\dfrac{\dfrac{\text{il pleut} \qquad \text{il pleut} \to \text{sol mouillé}}{\text{sol mouillé}} \qquad \text{sol mouillé} \to \text{sol glissant}}{\text{sol glissant}}$$

La règle d'élimination de la flèche y est appliquée deux fois.

Notion d'hypothèse

La déduction naturelle fait des raisonnements sous des hypothèses. Une démonstration de q sous l'hypothèse p a la forme :

$$\frac{\begin{array}{c} p \\ \vdots \end{array}}{q}$$

où les points de suspension verticaux représentent un arbre de preuve de conclusion q et dont certaines feuilles comportent l'hypothèse p.

Notion d'hypothèse déchargée

Il existe aussi des règles où une hypothèse est *déchargée*, c'est-à-dire que l'hypothèse n'est plus supposée à partir de l'application de la règle. Par exemple, à partir d'une démonstration de q sous l'hypothèse p , on peut construire une démonstration de l'implication $p \to q$. On note :

$$\frac{\begin{matrix}[p] \\ \vdots \\ q\end{matrix}}{p \to q}$$

et les crochets dans $[p]$ signifient que l'hypothèse p est déchargée. Cette règle appelée *introduction de l'implication* est une internalisation du théorème de déduction des systèmes à la Hilbert.

Notion de règle d'introduction et de règle d'élimination

La règle $\dfrac{p \qquad q}{p \land q}$ se lit : de la prémisse *p* et la prémisse *q*, on conclut la formule $p \land q$ (*p* et *q*). C'est une *règle d'introduction* (ici la règle d'introduction du « et ») car le connecteur « et » apparaît dans la conclusion.

La règle $\dfrac{p \land q}{p}$ se lit : de la prémisse $p \land q$, on conclut la formule *p*. C'est une *règle d'élimination* (ici la règle d'élimination du « et ») car le connecteur « et » est éliminé et n'est plus dans la conclusion.

Différentes présentations des règles et des démonstrations

Il existe plusieurs présentations[7] des règles et des démonstrations en déduction naturelle.

- La présentation historique « à la Prawitz » en arbre de preuve où les hypothèses sont aux feuilles ; c'est celle qui est utilisée dans cet article.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[p \wedge q]}{q}{\scriptstyle(\wedge E)} \qquad \dfrac{[p \wedge q]}{p}{\scriptstyle(\wedge E)}}{q \wedge p}{\scriptstyle(\wedge I)}}{p \wedge q \to q \wedge p}{\scriptstyle(\to I)}$$

- Une présentation où les jugements sont des séquents de la forme $\Gamma \vdash \varphi$ où Γ contient les hypothèses actives et φ est la formule démontrée. Cette présentation bien que moins intuitive est techniquement la plus adaptée à démontrer les propriétés de la déduction naturelle.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{p \wedge q \vdash q}{\scriptstyle(\wedge E)} \qquad \dfrac{}{p \wedge q \vdash p}{\scriptstyle(\wedge E)}}{p \wedge q \vdash q \wedge p}{\scriptstyle(\wedge I)}}{\emptyset \vdash p \wedge q \to q \wedge p}{\scriptstyle(\to I)}$$

- La présentation « à la Fitch » où une démonstration où chaque ligne contient un jugement numérotés. On indente le texte à chaque fois que l'on charge une hypothèse.

  1 $p \wedge q$

      2 p

      3 q

      4 $q \wedge p$

  5 $p \wedge q \to q \wedge p$

1. Pour toute formule $\varphi \in \Gamma$: $\dfrac{}{\Gamma \mathrel{|\!\!\sim} \varphi}$ [introduction d'hypothèse]
2. $\dfrac{\Gamma \cup \{\varphi\} \mathrel{|\!\!\sim} \psi}{\Gamma \mathrel{|\!\!\sim} (\varphi \to \psi)}$ [$\to$-introduction]
3. $\dfrac{\Gamma \mathrel{|\!\!\sim} (\varphi \to \psi) \qquad \Gamma \mathrel{|\!\!\sim} \varphi}{\Gamma \mathrel{|\!\!\sim} \psi}$ [$\to$-élimination]
4. $\dfrac{\Gamma \mathrel{|\!\!\sim} \varphi \qquad \Gamma \mathrel{|\!\!\sim} \psi}{\Gamma \mathrel{|\!\!\sim} (\varphi \wedge \psi)}$ [$\wedge$-introduction]
5. $\dfrac{\Gamma \mathrel{|\!\!\sim} (\varphi \wedge \psi)}{\Gamma \mathrel{|\!\!\sim} \varphi}$ [$\wedge$-élimination-1]
6. $\dfrac{\Gamma \mathrel{|\!\!\sim} (\varphi \wedge \psi)}{\Gamma \mathrel{|\!\!\sim} \psi}$ [$\wedge$-élimination-2]
7. $\dfrac{\Gamma \mathrel{|\!\!\sim} \varphi}{\Gamma \mathrel{|\!\!\sim} (\varphi \vee \psi)}$ [$\vee$-introduction-1]
8. $\dfrac{\Gamma \mathrel{|\!\!\sim} \psi}{\Gamma \mathrel{|\!\!\sim} (\varphi \vee \psi)}$ [$\vee$-introduction-2]
9. $\dfrac{\Gamma \mathrel{|\!\!\sim} (\varphi \vee \psi) \qquad \Gamma \cup \{\varphi\} \mathrel{|\!\!\sim} \eta \qquad \Gamma \cup \{\psi\} \mathrel{|\!\!\sim} \eta}{\Gamma \mathrel{|\!\!\sim} \eta}$ [$\vee$-élimination]
10. $\dfrac{\Gamma \cup \{\varphi\} \mathrel{|\!\!\sim} (\psi \wedge \neg\psi)}{\Gamma \mathrel{|\!\!\sim} \neg\varphi}$ [$\neg$-introduction] (Si φ infère une absurdité, on en déduit $\neg\varphi$; en fait, le choix de la formule ψ importe peu.)
11. $\dfrac{\Gamma \mathrel{|\!\!\sim} (\psi \wedge \neg\psi)}{\Gamma \mathrel{|\!\!\sim} \varphi}$ [$\neg$-élimination] (Une absurdité suffit pour déduire n'importe quelle formule.)

12. $\dfrac{}{\Gamma \mathrel{|\!\!\sim} (\varphi \vee \neg\varphi)}$ [tiers exclus]

Exemples

- Voici une démonstration en déduction naturelle de la formule $p \land q \to q \land p$:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{[p \land q]}{q}{\scriptstyle (\land E)} \qquad \cfrac{[p \land q]}{p}{\scriptstyle (\land E)}}{q \land p}{\scriptstyle (\land I)}}{p \land q \to q \land p}{\scriptstyle (\to I)}$$

  L'hypothèse $p \land q$ est déchargée par la règle $\to I$.

- Voici une démonstration en déduction naturelle de la formule $((p \to \bot) \to \bot) \to p$:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{[(p \to \bot) \to \bot] \qquad [p \to \bot]}{\bot}{\scriptstyle (\to E)}}{p}{\scriptstyle (RAA)}}{((p \to \bot) \to \bot) \to p}{\scriptstyle (\to I)}$$

  L'hypothèse $p \to \bot$ est déchargée par la règle de raisonnement par l'absurde (RAA). L'hypothèse $(p \to \bot) \to \bot$ est déchargée par la règle d'introduction (→I).

Notons $\vdash^{Hilbert}$ le prédicat d'inférence issu du calcul de Hilbert et notons $\vdash^{deduction}$ le prédicat d'inférence défini par $\Gamma \vdash^{deduction} \varphi$ si et seulement si $(\Gamma \mid\!\sim \varphi)$ est un théorème de la déduction naturelle. Il est alors légitime de se demander si ces deux inférences définissent le même prédicat sur $\mathcal{P}(For(P)) \times For(P)$, et donc la même logique générale. La réponse est oui :

Théorème : Le symbole d'inférence défini par la déduction naturelle coïncide avec le prédicat d'inférence du calcul propositionnel.

La preuve est laissée en exercice : pour prouver que les deux prédicats $\vdash^{Hilbert}$ et $\vdash^{deduction}$ sont égaux, il suffit, par un argument simple d'induction sur la longueur des preuves, de prouver :

- que pour toute règle $\dfrac{\varphi_1 \ \cdots \ \varphi_n}{\psi}$ du calcul de Hilbert, la formule $(\{\varphi_1, \cdots, \varphi_n\} \mid\!\sim \psi)$ est un théorème du calcul de la déduction naturelle.
- et que pour toute règle $\dfrac{\Gamma_1 \mid\!\sim \varphi_1 \ , \cdots, \ \Gamma_n \mid\!\sim \varphi_n}{\Gamma \mid\!\sim \varphi}$ de la déduction naturelle, si l'on a $\Gamma_i \vdash^{Hilbert} \varphi_i$ pour $i = 1..n$ alors on a $\Gamma \vdash^{Hilbert} \varphi$

Il résulte donc du théorème précédent que la déduction naturelle définit un prédicat d'inférence correct et complet pour la logique des propositions.

En fait, hormis son intérêt historique, la version de Hilbert ne reste d'actualité que parce qu'elle écourte un peu les preuves mathématiques de correction et complétude ; les inférences formelles du calcul sont par contre considérablement plus faciles à mener avec la déduction naturelle.

Il existe ainsi plusieurs calculs formels qui peuvent être utilisés pour mécaniser le même prédicat d'inférence de la logique des propositions. Ce calcul des séquents présente la particularité d'être bien adapté pour automatiser (au moins partiellement) les preuves.

Règles de remplacement

- En logique, une règle de remplacement est une règle d'inférence appliquée à une portion d'une expression. Un système logique peut être construit à l'aide d'axiomes, de règles d'inférences(parfois, les deux) en utilisant des formules logiques. On distingue une règle d'inférence d'une règle de remplacement en ce que la première s'applique sur toute une formule logique, tandis que la seconde ne s'applique que sur une portion de celle-ci. Les règles de remplacement sont utilisées en calcul des propositions pour manipuler des énoncés.
- On compte, parmi les règles de remplacement, les lois de De Morgan, la commutativité, l'associativité, la distributivité, la double négation, la transposition, les lois de l'implication matérielle, les tautologies, etc.

Calcul des séquents

La notion de séquents

Le calcul des séquents prévéligie la notion de règles d'inférences et réduit le nombre d'axiomes logiques à son minimum.

Ce système de preuve manipule des phrases que l'on appelle communément des *séquents*.

Définition : Un *séquent* sur une signature Σ est un couple (Γ, Δ) où Γ et Δ sont des ensembles de Σ-formules finis et non vides. On le note $\Gamma \mid\!\sim \Delta$.
Dans la suite, On notera simplement "Γ, φ" pour "$\Gamma \bigcup \{\varphi\}$".

Remarque : La sémantique d'un séquent est analogue à une clause. La différence est que les formules de Γ et de Δ sont totalement arbitraires.
Le séquent "$\varphi_1, \ldots, \varphi_n \mid\!\sim \psi_1, \ldots, \psi_m$" est alors interprété comme la formule :

$$\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \Rightarrow \psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_m$$

Le séquent $\Gamma, \varphi, \Delta, \Delta \mid\!\sim \Gamma', \varphi, \Delta'$ est donc toujours vrai.

Axiomes et règles

De la même façon que pour la méthode de Frege-Hilbert, nous entendons par axiome toute formule dont la valeur de vérité est vraie (plus communément appelée une *tautologie*). De part la remarque ci-dessus, nous appellerons alors *axiome* tous les séquents de la forme : $\varphi \mid\!\sim \varphi$ où φ est une Σ-formule quelconque.

Les règles de déduction

Ces règles se partagent en trois ensembles distincts. Le premier ensemble contient toutes les règles dites *structurelles*. Elles caractérisent la propriété pour Γ et Δ dans un séquent "$\Gamma \mid\!\sim \Delta$", d'être des ensembles. L'ensemble des règles structurelles contient en plus, une règle très importante pour cette méthode de preuve : la *coupure*. Intuitivement, nous pouvons la considérer comme une généralisation de la règle du modus ponens de la méthode de Frege-Hilbert.
Le second ensemble contient toutes les règles logiques qui restranscrive syntaxiquement les propriétés sémantiques liées aux connecteurs propositionnels. Enfin, le dernier ensemble contient les règles logiques attachées aux quantificateurs.
Le deux premiers ensembles définissent le calcul des séquents pour la logique propositionnelle. Avec les règles associées aux quantificateurs, on obtient le calcul des séquents pour la logique des prédicats du 1er ordre.

Définition : Soit Σ une signature dont $\mathcal{V}$ est l'ensemble des variables. Soient Γ, Δ, Λ et Π quatre ensembles de Σ-formules. Soient φ et ψ deux Σ-formules. Soient x et y deux variables de $\mathcal{V}$. Soient t, $t_1$et t_2 des termes de $T_\Sigma(\mathcal{V})$. On considère l'ensemble des règles d'inférence suivant :

Règles structurelles

Affaiblissement :

gauche $\dfrac{\Gamma \mid\!\sim \Delta}{\varphi, \Gamma \mid\!\sim \Delta}$ droite $\Gamma \mid\!\sim \Delta \Gamma \mid\!\sim \Delta, \varphi$

Diminution :

gauche $\dfrac{\varphi, \varphi, \Gamma \mid\!\sim \Delta}{\varphi, \Gamma \mid\!\sim \Delta}$ droite $\dfrac{\Gamma \mid\!\sim \Delta, \varphi, \varphi}{\Gamma \mid\!\sim \Delta, \varphi}$

Échange :

gauche $\dfrac{\Gamma, \varphi, \psi, \Lambda \mid\!\sim \Delta}{\varphi, \Gamma, \psi, \varphi, \Lambda \mid\!\sim \Delta}$ droite $\dfrac{\Gamma \mid\!\sim \Delta, \varphi, \psi, \Lambda}{\Gamma \mid\!\sim \Delta, \psi, \varphi, \Lambda}$

Coupure :

$$\frac{\Gamma \mid\!\sim \Delta, \varphi \qquad \varphi, \Lambda \mid\!\sim \Pi}{\Gamma, \Lambda \mid\!\sim \Delta, \Pi}$$

Règles propositionnelles

$$\frac{\Gamma, \varphi, \psi \mathrel{|\!\sim} \Delta}{\Gamma, \varphi \wedge \psi \mathrel{|\!\sim} \Delta}(\wedge \mathrel{|\!\sim})$$

$$\frac{\Gamma \mathrel{|\!\sim} \Delta, \varphi \quad \Gamma \mathrel{|\!\sim} \Delta, \psi}{\Gamma \mathrel{|\!\sim} \Delta, \varphi \wedge \psi}(\mathrel{|\!\sim} \wedge)$$

$$\frac{\Gamma, \varphi \mathrel{|\!\sim} \Delta \quad \Gamma, \psi \mathrel{|\!\sim} \Delta}{\Gamma, \varphi \vee \psi \mathrel{|\!\sim} \Delta}(\vee \mathrel{|\!\sim})$$

$$\frac{\Gamma, \mathrel{|\!\sim} \Delta, \varphi, \psi}{\Gamma \mathrel{|\!\sim} \Delta, \varphi \vee \psi}(\mathrel{|\!\sim} \vee)$$

$$\frac{\Gamma \mathrel{|\!\sim} \Delta, \varphi}{\Gamma, \neg\varphi \mathrel{|\!\sim} \Delta}(\neg \mathrel{|\!\sim})$$

$$\frac{\Gamma, \varphi \mathrel{|\!\sim} \Delta}{\Gamma \mathrel{|\!\sim} \Delta, \neg\varphi}(\mathrel{|\!\sim} \neg)$$

$$\frac{\Gamma \mathrel{|\!\sim} \Delta, \varphi \quad \Gamma, \psi \mathrel{|\!\sim} \Delta}{\Gamma, (\varphi \Rightarrow \psi) \mathrel{|\!\sim} \Delta}(\Rightarrow \mathrel{|\!\sim})$$

$$\frac{\Gamma, \varphi \mathrel{|\!\sim} \Delta, \psi}{\Gamma \mathrel{|\!\sim} \Delta, (\varphi \Rightarrow \psi)}(\mathrel{|\!\sim} \Rightarrow)$$

Ces règles sont appelées *introduction* quand elles sont utilisées de haut en bas, et *élimination* quand elles sont utilisées de bas en haut.

Pour prouver un théorème avec le calcul des séquents, on conserve la représentation en arbre de preuve. Ceci vient du fait même de la définition du calcul des séquents qui cherche à montrer que la formule à proubver ne contient comme sous-formule (à transformation près) que des tautologies, et donc comme sous-formules de bases des axiomes de la forme : $\varphi \mid\!\sim \varphi$.

Une démonstration de LK est un arbre de séquents construit au moyen des règles ci-dessus de façon que chaque séquent soit conclusion d'exactement une règle ; la démonstration est terminée si l'on arrive à ce que toutes les feuilles de l'arbre soient des règles axiome. Le séquent racine de l'arbre est la conclusion de la démonstration. Voici un exemple de démonstration du principe de contraposition de l'implication ; pour simplifier on a omis les utilisations de règles d'échange et représenté en gras les (occurrences de) formules dans les séquents prémisses sur lesquelles porte chaque règle :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \vdash A}\,\mathit{ax}}{A \vdash \boldsymbol{A}, B}\,\mathit{aff\text{-}droite}}{\neg \boldsymbol{A}, A \vdash B}\,\neg\text{-}\mathit{gauche} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{B \vdash B}\,\mathit{ax}}{A, \boldsymbol{B} \vdash B}\,\mathit{aff\text{-}gauche}}{A \vdash \neg \boldsymbol{B}, B}\,\neg\text{-}\mathit{droite}}{\neg B \to \neg A, \boldsymbol{A} \vdash \boldsymbol{B}}\,\to\text{-}\mathit{gauche}}{\neg \boldsymbol{B} \to \neg \boldsymbol{A} \vdash \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}}\,\to\text{-}\mathit{droite}}{\vdash (\neg B \to \neg A) \to (A \to B)}\,\to\text{-}\mathit{droite}$$

Exercice

$(A \to A)$	identité
$A \lor \neg A$	tiers exclu
$A \to \neg\neg A$	double négation
$\neg\neg A \to A$	double négation classique
$((A \to B) \to A) \to A$	loi de Peirce
$\neg(A \land \neg A)$	non contradiction
$\neg(A \land B) \leftrightarrow (\neg A \lor \neg B)$	lois de De Morgan
$\neg(A \lor B) \leftrightarrow (\neg A \land \neg B)$	
$(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$	contraposition
$((A \to B) \land A) \to B$	modus ponens (propositionnel)
$((A \to B) \land \neg B) \to \neg A$	modus tollens (propositionnel)
$((A \to B) \land (B \to C)) \to (A \to C)$	modus barbara (propositionnel)
$(A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$	modus barbara (implicatif)
$(A \land (B \lor C)) \leftrightarrow ((A \land B) \lor (A \land C))$	distributivité
$(A \lor (B \land C)) \leftrightarrow ((A \lor B) \land (A \lor C))$	

Réflexion

- Générateur de formules valides.