espace vectoriel — L'espace vectorie réel $\mathbb{R}^n$ est le prototype d'espace vectoriel réel de dimension finie. Ses éléments sont les n-uplets ordonnées de nombres réels $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, que nous écrirons sous la forme de *vecteur colonne* :

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Les opérations d'addition et de multiplication de nombre réels permettent de définir deux opérations sur $\mathbb{R}^n$, l'addition de vecteurs :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{bmatrix}$$

et la multiplication d'un vecteur par un nombre réel, pour tout réel λ,

$$\lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{bmatrix}.$$

$$u(\lambda\mathbf{x}+\mu\mathbf{y})=\lambda u(\mathbf{x})+\mu u(\mathbf{y}).$$

$$(u+v)(\mathbf{x})=u(\mathbf{x})+v(\mathbf{x}),$$
$$(\lambda u)(\mathbf{x})=\lambda u(\mathbf{x}),$$

Définitions

Une matrice $n \times m$ est un tableau de nombres à n lignes et m colonnes :

Exemple avec $n = 2$, $m = 3$: $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

n et m sont les *dimensions* de la matrice.

Une matrice est symbolisée par une lettre en caractères gras, par exemple **A**. On note A_{ij} l'élément situé à l'intersection de la ligne i et de la colonne j (la ligne est toujours nommée en premier).

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1m} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nm} \end{bmatrix}$$

On note $[A_{ij}]$ la matrice d'élément général A_{ij}. On a donc : $\mathbf{A} = [A_{ij}]$

Si m = 1, la matrice est appelée *vecteur* (plus précisément *vecteur-colonne*) :

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Quelques matrices carrées particulières (Exemples avec n = 4)

Matrice unité	$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	Parfois notée $\mathbf{I}_n$ n est la dimension de la matrice (soit $\mathbf{I}_4$ dans cet exemple)

Matrice diagonale

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} D_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{44} \end{bmatrix}$$

notée diag(D_{ii})

Matrice triangulaire supérieure
(*Upper triangular matrix*, **U**)

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} & U_{14} \\ 0 & U_{22} & U_{23} & U_{24} \\ 0 & 0 & U_{33} & U_{34} \\ 0 & 0 & 0 & U_{44} \end{bmatrix}$$

Matrice triangulaire inférieure
(*Lower triangular matrix*, **L**)

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} L_{11} & 0 & 0 & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 & 0 \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} & 0 \\ L_{41} & L_{42} & L_{43} & L_{44} \end{bmatrix}$$

Une matrice carrée **A** est dite *symétrique* si :

$$A_{ji} = A_{ij}$$

pour tout i différent de j

II. Opérations sur les matrices

II.A. Addition, soustraction

L'addition et la soustraction des matrices se font terme à terme. Les matrices doivent avoir les mêmes dimensions :

$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 3 \\ 5 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 0 & -3 \\ 3 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

II.B. Multiplication par un nombre

Chaque terme de la matrice est multiplié par le nombre :

$$2 \times \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 8 & 6 & -2 \end{bmatrix}$$

II.C. Transposition

La transposée $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ (aussi notée $\mathbf{A}'$) d'une matrice $\mathbf{A}$ est la matrice obtenue en échangeant les lignes et les colonnes de $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

La transposée d'un vecteur-colonne est un vecteur-ligne :

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{x}^T = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix}$$

II.D. Multiplication des matrices

Définissons tout d'abord le produit d'un vecteur-ligne $\mathbf{x}^T$ par un vecteur-colonne $\mathbf{y}$:

$$\mathbf{x}^T\mathbf{y} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{bmatrix} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Ce produit est appelé *produit scalaire* des vecteurs **x** et **y**, noté $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$. Les vecteurs doivent avoir la même dimension.

Le produit matriciel s'en d�duit : le produit de la matrice **A** (n × m) par la matrice **B** (m × p) est la matrice **C** (n × p) telle que l'élément C_{ij} est égal au produit scalaire de la ligne i de la matrice **A** par la colonne j de la matrice **B**.

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^{m} A_{ik} B_{kj} \qquad i = 1..n \quad j = 1..p$$

$$\boxed{c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}}$$

Exemple :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 7 \\ 23 & 9 \end{bmatrix}$$

On a en effet, en effectuant les produits ligne par colonne :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 1 \times 5 + 2 \times 2 + 0 \times 3 = 9 \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = 1 \times 1 + 2 \times 3 + 0 \times 4 = 7$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 4 \times 5 + 3 \times 2 - 1 \times 3 = 23 \qquad \begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = 4 \times 1 + 3 \times 3 - 1 \times 4 = 9$$

Propriétés :

- Le produit matriciel est :
  - *associatif* : $\mathbf{ABC} = (\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$
  - *distributif par rapport à l'addition* : $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$
  - *non commutatif* : **AB** n'est pas égal à **BA** en général.

- La matrice unité **I** est *élément neutre* pour la multiplication : $\mathbf{AI}_m = \mathbf{I}_n\mathbf{A} = \mathbf{A}$, si la matrice **A** est de dimensions $n \times m$.

- Transposée d'un produit : $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$ (Attention au changement d'ordre !).

Quelques produits particuliers :

(**x** et **y** sont des vecteurs-colonnes, **A** est une matrice)

$$\mathbf{x}^T\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

Carré scalaire.

Sa racine carrée $(\mathbf{x}^T\mathbf{x})^{1/2}$ est appelée *norme* du vecteur (notée $\|\mathbf{x}\|$)

$$\mathbf{x}\mathbf{y}^T = \mathbf{x} \otimes \mathbf{y} = \left[x_i y_j\right]$$

Produit extérieur des vecteurs **x** et **y**
(Matrice d'élément général $x_i y_j$)

Ne pas confondre avec le produit scalaire.

$$\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_i x_j$$

Forme quadratique (si **A** est symétrique)

$$\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_i y_j$$

Forme bilinéaire (dite symétrique si **A** est symétrique)

II.E. Inversion des matrices carrées

Une matrice carrée **A** est dite *inversible* ou *régulière* s'il existe une matrice carrée $\mathbf{A}^{-1}$ (appelée *matrice inverse*) telle que :

$$\mathbf{A} \times \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \times \mathbf{A} = \mathbf{I}$$

Si $\mathbf{A}^{-1}$ n'existe pas, la matrice **A** est dite *singulière*

Propriétés :

- $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$
- $(\mathbf{A}^{T})^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^{T}$
- $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$ (Attention au changement d'ordre !)
- $[\mathrm{diag}(D_{ii})]^{-1} = \mathrm{diag}(1/D_{ii})$
- La matrice **A** est dite *orthogonale* si $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{T}$

Méthode de Gauss pour inverser les matrices

La méthode pour inverser une matrice A consiste à faire des opérations élémentaires sur les lignes de la matrice A jusqu'à la transformer en la matrice identité I. On fait simultanément les mêmes opérations élémentaires en partant de la matrice I. On aboutit alors à une matrice qui est A^{-1}. La preuve sera vue dans la section suivante.

En pratique, on fait les deux opérations en même temps en adoptant la disposition suivante : à côté de la matrice A que l'on veut inverser, on rajoute la matrice identité pour former un tableau $(A \mid I)$. Sur les lignes de cette matrice augmentée, on effectue des opérations élémentaires jusqu'à obtenir le tableau $(I \mid B)$. Et alors $B = A^{-1}$.

Ces opérations élémentaires sur les lignes sont :

1. $L_i \leftarrow \lambda L_i$ avec $\lambda \neq 0$: on peut multiplier une ligne par un réel non nul (ou un élément de $\mathbb{K} \setminus \{0\}$).
2. $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$ (et $j \neq i$) : on peut ajouter à la ligne L_i un multiple d'une autre ligne L_j.
3. $L_i \leftrightarrow L_j$: on peut échanger deux lignes.

N'oubliez pas : tout ce que vous faites sur la partie gauche de la matrice augmentée, vous devez aussi le faire sur la partie droite.

Un exemple

Calculons l'inverse de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Voici la matrice augmentée, avec les lignes numérotées :

$$(A \mid I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} {\scriptstyle L_1} \\ {\scriptstyle L_2} \\ {\scriptstyle L_3} \end{array}$$

On applique la méthode de Gauss pour faire apparaître des 0 sur la première colonne, d'abord sur la deuxième ligne par l'opération élémentaire $L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1$ qui conduit à la matrice augmentée :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -5 & -4 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) {\scriptstyle L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1}$$

Puis un 0 sur la première colonne, à la troisième ligne, avec $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -5 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) {\scriptstyle L_3 \leftarrow L_3 + L_1}$$

On multiplie la ligne L_2 afin qu'elle commence par 1 :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{8} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) {\scriptstyle L_2 \leftarrow -\frac{1}{8} L_2}$$

On continue afin de faire apparaître des 0 partout sous la diagonale, et on multiplie la ligne L_3. Ce qui termine la première partie de la méthode de Gauss :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{8} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 1 \end{array}\right) {\scriptstyle L_3 \leftarrow L_3 - 4L_2}$$

puis

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{8} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right)_{L_3 \leftarrow 2L_3}$$

Il ne reste plus qu'à « remonter » pour faire apparaître des zéros au-dessus de la diagonale :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{7}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right) L_2 \leftarrow L_2 - \frac{5}{8} L_3$$

puis

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{7}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right)^{L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 - L_3}$$

Ainsi l'inverse de A est la matrice obtenue à droite et après avoir factorisé tous les coefficients par $\frac{1}{4}$, on a obtenu :

$$A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 7 & -3 & -5 \\ -8 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

Pour se rassurer sur ses calculs, on n'oublie pas de vérifier rapidement que $A \times A^{-1} = I$.

II.F. Déterminant d'une matrice carrée

Pour une matrice 2 × 2, on montre que la matrice inverse est donnée par :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Le nombre *ad* - *bc* est appelé *déterminant* de la matrice **A**, noté :

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = |\mathbf{A}| = \mathbf{det}(\mathbf{A})$$

La matrice inverse $\mathbf{A}^{-1}$ n'existe donc que si det **A** est différent de zéro.

La matrice **A** est singulière si det **A** = 0, régulière dans le cas contraire. Ce résultat se généralise à une matrice de dimension quelconque.

Propriétés des déterminants :

- $\det(\mathbf{A}^{T}) = \det(\mathbf{A})$
- $\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A}) \times \det(\mathbf{B})$
- Le déterminant d'une matrice triangulaire ou diagonale est égal au produit des éléments diagonaux. En particulier, $\det(\mathbf{I}) = 1$ (si **I** est la matrice unité)
- Si **A** est régulière, $\det(\mathbf{A}^{-1}) = 1 / \det(\mathbf{A})$
  puisque $\det(\mathbf{AA}^{-1}) = \det(\mathbf{A}) \times \det(\mathbf{A}^{-1}) = \det(\mathbf{I}) = 1$
- Si **A** est orthogonale, $\det(\mathbf{A}) = \pm 1$
  puisque $\det(\mathbf{AA}^{T}) = [\det(\mathbf{A})]^2 = \det(\mathbf{I}) = 1$

Déterminant ($det(A)$ ou $|A|$)

Soit A une matrice carrée $\mathrm{n} \times \mathrm{n}$.

Matrice 2×2 : $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$

Ordre supérieur : Le déterminant est égal à la somme des produits obtenus en multipliant les éléments d'une ligne quelconque (ou d'une colonne) par leur cofacteurs respectifs cofacteur = $\mathrm{A_{ij}} = (-1)^{\mathrm{i+j}}|\mathrm{M_{ij}}|$ où M_{ij} (mineur) est la sous-matrice carrée $(\mathrm{n}-1) \times (\mathrm{n}-1)$ obtenue en supprimant la $\mathrm{i}^{\text{ème}}$ ligne et la $\mathrm{j}^{\text{ème}}$ colonne de A.

Ainsi $|\mathrm{A}| = \mathrm{a_{11}A_{i1}} + \mathrm{a_{22}A_{i2}} + \cdots + \mathrm{a_{nn}A_{in}}$.

La trace

Dans le cas d'une matrice carrée de taille $n \times n$, les éléments $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ sont appelés les *éléments diagonaux*.
Sa *diagonale principale* est la diagonale $(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Définition 11.
La *trace* de la matrice A est le nombre obtenu en additionnant les éléments diagonaux de A. Autrement dit,

$$\boxed{\operatorname{tr} A = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}.}$$

Exemple 20.

- Si $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$, alors $\operatorname{tr} A = 2 + 5 = 7$.
- Pour $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 8 \\ 11 & 0 & -10 \end{pmatrix}$, $\operatorname{tr} B = 1 + 2 - 10 = -7$.

Théorème 6.
Soient A et B deux matrices $n \times n$. Alors :

1. $\operatorname{tr}(A + B) = \operatorname{tr} A + \operatorname{tr} B$,
2. $\operatorname{tr}(\alpha A) = \alpha \operatorname{tr} A$ *pour tout* $\alpha \in \mathbb{K}$,
3. $\operatorname{tr}(A^T) = \operatorname{tr} A$,
4. $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.

Matrices antisymétriques

Définition 13.
Une matrice A de taille $n \times n$ est *antisymétrique* si

$$A^T = -A,$$

c'est-à-dire si $a_{ij} = -a_{ji}$ pour tout $i, j = 1, \ldots, n$.

Exemple 23.

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ -4 & 0 & -5 \\ -2 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Remarquons que les éléments diagonaux d'une matrice antisymétrique sont toujours tous nuls.

Forme échelonnée d’une matrice

Une matrice $A = (a_{ij})$ est dite « **échelonnée** » si le nombre de « 0 » précédent le premier élément non nul d’une ligne augmente de ligne en ligne.
Elle est appelée « **matrice échelonnée réduite** » si en plus, le premier élément non nul d’une ligne est égal à « 1 » et si ,dans la colonne correspondante (colonne pivot) , tous les autres éléments sont « 0 ».

On peut réduire une matrice à sa forme échelonnée (ou échelonnée réduite) en effectuant des opérations élémentaires sur ses lignes :

- Multiplier une ligne par un scalaire non nul.
- Intervertir ou permuter 2 lignes.
- Ajouter à une ligne « k » fois une autre ligne.

Rang d'une matrice $r(A)$

Le rang d'une matrice A de dimension $m \times n$ correspond au nombre de lignes non nulles de sa forme échelonnée réduite. On dit que A est de « plein rang » si $\mathrm{r(A) = m}$

Remarque : Le rang d'une matrice donne le nombre maximum de ses lignes linéairement indépendantes ainsi que le nb max de ses colonnes linéairement indépendantes.

Propriétés :

1. Si B peut être obtenue de A par applications successives d'opérations élémentaires sur ses lignes, alors $\mathrm{r(A)} = \mathrm{r(B)}$
2. $\mathrm{r(A^T)} = \mathrm{r(A)}$
3. Si le produit matriciel AB est défini, alors $\mathrm{r(AB)} \leq \min\{\mathrm{r(A)}; \mathrm{r(B)}\}$

Matrice inverse

Soit A une matrice carrée $n \times n$. L'inverse de A (notée A^{-1}) , si elle existe, est la matrice qui satisfait

$$\mathrm{AA}^{-1} = \mathrm{A}^{-1}\mathrm{A} = \mathrm{I}_\mathrm{n}$$

Si l'inverse de A existe, on peut l'obtenir de la façon suivante :

1. Considérer la matrice augmentée

2. $(\mathrm{A} \vdots \mathrm{I}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & \vdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & \vdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & & \vdots & & & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & \vdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$

3. Effectuer des opérations élémentaires sur les lignes de la matrice augmentée jusqu'à ce qu'elle devienne $(\mathrm{I} \vdots \mathrm{B})$. La matrice B est alors l'inverse de A i.e. $\mathrm{B} = \mathrm{A}^{-1}$.

Propriétés :

1. Si A est inversible, alors $A - 1$ est aussi inversible et $(\mathrm{A}^{-1})^{-1} = \mathrm{A}$.
2. Si A est inversible, alors $(\mathrm{A}^{-1})^{\mathrm{T}} = (\mathrm{A}^{\mathrm{T}})^{-1}$
3. Si A et B sont 2 matrices carrées inversibles de même dimension, alors leur produit AB est aussi inversible et $(\mathrm{A\,B})^{-1}$= $\mathrm{B}^{-1}\mathrm{A}^{-1}$

Existence : A de dimension $n \times n$ est inversible si $\mathrm{r(A)} = \mathrm{n}$

Matrices semblables

En mathématiques, deux matrices carrées *A* et *B* sont dites **semblables** s'il existe une matrice inversible *P* telle que $A = PBP^{-1}$.

La similitude est une relation d'équivalence.

Deux matrices sont semblables si et seulement si elles représentent le même endomorphisme d'un espace vectoriel dans deux bases (éventuellement) différentes.

Il ne faut pas confondre la notion de matrices semblables avec celle de matrices équivalentes. En revanche, si deux matrices sont semblables, alors elles sont équivalentes. Un moyen de déterminer si deux matrices sont semblables est de les réduire, c'est-à-dire de les ramener à une forme type : diagonale, forme réduite de Jordan…