Démonstrations par la méthode des tableaux

Nous avons jusque-là uniquement évoqué des systèmes de déduction valides et complets, parfois sans fournir aucune preuve de nos théorèmes. Nous allons étudier plus complètement la méthode des tableaux. Nous avons choisi de développer cette méthode, car elle est très algorithmique et basée sur la notion d’arbre, ce qui appuiera notre argumentaire récurrent sur le fait que la notion d’arbre est partout en informatique.

Principe

Pour simplifier la discussion, on considèrera que les formules propositionnelles ne sont écrites qu'avec les connecteurs $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow$. La formule $(F \Leftrightarrow G)$ sera considérée comme une abréviation de la formule $((F \Rightarrow G) \wedge (G \Rightarrow F))$.

Supposons que l'on veuille prouver qu'une formule F est une tautologie. Si la formule F est de la forme $(F_1 \wedge F_2)$, alors on peut chercher à prouver F_1 et F_2, et écrire F_1, F_2. Si la formule est de la forme $(F_1 \vee F_2)$, alors on peut explorer deux possibilités, l'une pour explorer le cas de F_1 et l'autre pour le cas de F_2.

On va ramener toutes les autres possibilités à ces deux configurations, en utilisant les lois de Morgan, et quelques équivalences : si la formule F est de la forme $(F_1 \Rightarrow F_2)$, on va la voir comme $(F_2 \vee \neg F_1)$ et appliquer la règle du $\vee$, et si F est de la forme $\neg(F_1 \Rightarrow F_2)$, comme $(F_1 \wedge \neg F_2)$ et appliquer la règle du $\wedge$. On traite chacun des autres cas à l'aide des lois de Morgan.

En faisant cela de façon systématique, on va construire un arbre, dont la racine est étiquetée par la négation de la formule F : autrement dit, pour prouver une formule F, la méthode commence par la négation de la formule F.

Partons par exemple de la formule F suivante que nous cherchons à prouver :

$$(((p \wedge q) \Rightarrow r) \Rightarrow ((p \Rightarrow r) \vee (q \Rightarrow r))).$$

On part donc de la formule $\neg F$, c'est-à-dire de

$$\neg(((p \wedge q) \Rightarrow r) \Rightarrow ((p \Rightarrow r) \vee (q \Rightarrow r))).$$

- en transformant l'implication $\neg(F_1 \Rightarrow F_2)$ en la formule équivalente $(F_1 \wedge \neg F_2)$, on obtient $((p \wedge q) \Rightarrow r) \wedge \neg((p \Rightarrow r) \vee (q \Rightarrow r))$ pour se ramener à la règle du $\wedge$.
- On applique alors la règle du $\wedge$: on considère les formules $((p \wedge q) \Rightarrow r)$ et $\neg((p \Rightarrow r) \vee (q \Rightarrow r))$.
- On considère à l'instant d'après la dernière formule, que l'on peut voir par les lois de Morgan comme $(\neg(p \Rightarrow r) \wedge \neg(q \Rightarrow r))$: on lui associe $\neg(p \Rightarrow r)$ et $\neg(q \Rightarrow r)$ par la règle du $\wedge$.
- On considère alors $\neg(p \Rightarrow r)$, ce qui donne les formules p et $\neg r$.
- On obtient alors q et $\neg r$ à partir de $\neg(q \Rightarrow r)$.
- Si l'on considère maintenant $((p \wedge q) \Rightarrow r)$, que l'on peut voir comme $(r \vee \neg(p \wedge q))$, on a le choix par la règle du $\vee$ entre la formule $\neg(p \wedge q)$ ou r.
- Le cas de r est exclus par l'étape précédente, où l'on avait $\neg r$.
- Dans le premier cas, on a encore le choix entre $\neg p$ ou $\neg q$. Les deux cas sont exclus parce que l'on avait avant p et q.

Puisque toutes les branches mènent à une contradiction, il n'y a aucune situation dans laquelle F pourrait être fausse : on sait alors que F est une tautologie.

Le calcul que l'on vient de faire se représente naturellement par un arbre.

$$\neg(((p \wedge q) \Rightarrow r) \Rightarrow ((p \Rightarrow r) \vee (q \Rightarrow r)))$$

$$((p \wedge q) \Rightarrow r), \neg((p \Rightarrow r) \vee (q \Rightarrow r))$$

$$\neg(p \Rightarrow r), \neg(q \Rightarrow r)$$

$$p, \neg r$$

$$q, \neg r$$

$$\begin{array}{ccc} & \neg(p \wedge q) & & r \\ \neg p & & \neg q & \end{array}$$

Chaque branche correspond à un scénario possible. Si une branche possède un sommet étiqueté par une formule A telle que $\neg A$ apparaît plus haut sur la même branche (ou l'opposé), alors on cesse de développer cette branche, et on dit que la branche est *close* : cela veut dire qu'il y a une contradiction. Si toutes les branches sont closes, alors on dit que *l'arbre est clos*, et on sait que tous les scénarios sont exclus.

Considérons maintenant l'exemple de la formule G donnée par

$$((p \vee q) \Rightarrow (r \Rightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p))).$$

Avec la même méthode, on développe un arbre avec comme racine $\neg G$.

$$\neg((p \vee q) \Rightarrow (r \Rightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)))$$

$$(p \vee q), \neg(r \Rightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p))$$

$$r, \neg(\neg q \Rightarrow \neg p)$$

$$\neg q, \neg\neg p$$

$$p$$

$$\begin{array}{ccc} & / \quad \backslash & \\ p & & q \end{array}$$

Cette fois l'arbre a deux branches. La branche de droite est close. La branche de gauche n'est pas close, et les variables propositionnelles sur cette branche sont $r, \neg q$ et p. Si l'on prend une valuation v telle que $v(r) = 1$, $v(q) = 0$, $v(p) = 1$, la valuation donne la valeur 1 à $\neg G$, et donc 0 à G. Autrement dit, G n'est pas une tautologie. On dit que l'arbre est *ouvert*.

Description de la méthode

Un *tableau* est un arbre binaire étiqueté dont les sommets sont des ensembles de formules propositionnelles et qui est construit récursivement à partir de la racine sommet par sommet en utilisant un nombre fini de fois deux types de règles : les règles α et les règles β.

On rappelle que pour simplifier la discussion, on considère que les formules propositionnelles écrites qu'avec les connecteurs $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow$. La formule $(F \Leftrightarrow G)$ est considérée comme une abréviation de la formule $((F \Rightarrow G) \wedge (G \Rightarrow F))$.

Les formules sont découpées en deux classes, la classe α et la classe β, et à chaque formule on associe inductivement deux autres formules par les règles suivantes :

- Les formules de type α sont les formules du type :

  1. $\alpha = (A \wedge B)$: on lui associe $\alpha_1 = A$ et $\alpha_2 = B$.
  2. $\alpha = \neg(A \vee B)$: on lui associe $\alpha_1 = \neg A$ et $\alpha_2 = \neg B$.
  3. $\alpha = \neg(A \Rightarrow B)$: on lui associe $\alpha_1 = A$ et $\alpha_2 = \neg B$.
  4. $\neg\neg A$: on lui associe $\alpha_1 = \alpha_2 = A$.

- Les formules du type β sont les formules du type :

  1. $\beta = \neg(A \wedge B)$: on lui associe $\beta_1 = \neg A$, $\beta_2 = \neg B$.
  2. $\beta = (A \vee B)$: on lui associe $\beta_1 = A$, $\beta_2 = B$.
  3. $\beta = (A \Rightarrow B)$: on lui associe $\beta_1 = \neg A$, $\beta_2 = B$.

Si B est une branche d'un tableau, on note $\bigcup B$ pour l'ensemble des formules qui apparaissent sur un sommet de B.

Les deux règles de constructions d'un tableau sont les suivantes :

1. une règle α consiste à prolonger une branche finie d'un tableau T par le sommet étiqueté $\{\alpha_1, \alpha_2\}$, où α est une formule de type α qui apparaît sur un sommet de B.
2. une règle β consiste à prolonger une branche finie d'un tableau T par deux fils étiquetés respectivement par $\{\beta_1\}$ et $\{\beta_2\}$, où β est une formule de type β qui apparaît sur un sommet de B.

Remarque *Observons que ce n'est pas nécessairement le dernier sommet d'une branche B qui est développé à chaque étape, mais une formule quelque part sur la branche.*

On dit qu'une branche B est *close* s'il existe une formule A telle que A et $\neg A$ apparaissent sur la branche B. Dans le cas contraire la branche est dite *ouverte*.

Une branche B est *développée* si

1. pour toute formule de type α de $\bigcup B$, $\alpha_1 \in \bigcup B$ et $\alpha_2 \in \bigcup B$.
2. pour toute formule de type β de $\bigcup B$, $\beta_1 \in \bigcup B$ ou $\beta_2 \in \bigcup B$.

Un tableau est *développé* si toutes ses branches sont soit closes, soit développées. Un tableau est *clos* si toutes ses branches sont closes. Un tableau est *ouvert* s'il possède une branche ouverte.

Finalement, un tableau pour une formule A (respectivement pour un ensemble de formules Σ) est un tableau dont la racine est étiquetée par $\{A\}$ (respectivement par $\{A|A \in \Sigma\}$).

Terminaison de la méthode

Observons tout d'abord que l'on peut toujours appliquer des règles α ou β jusqu'à obtenir un tableau développé.

Proposition 4.1 *Si Σ est un ensemble fini de formules, alors il existe un tableau développé (et fini) pour Σ.*

Démonstration : Cela se prouve par récurrence sur le nombre n d'éléments de Σ.

Pour le cas $n = 1$, observons que la longueur des formules α_1, α_2, β_1, et β_2 est toujours inférieure strictement à la longueur de α et β. Le processus d'extension des branches qui ne sont pas closes se termine donc nécessairement après un nombre fini d'étapes. Le tableau obtenu au final est développé, sinon il serait possible de l'étendre.

Pour le cas $n > 1$, écrivons $\Sigma = \{F_1, \cdots, F_n\}$. Considérons par hypothèse de récurrence un tableau développé pour $\Sigma = \{F_1, \cdots, F_{n-1}\}$. Si ce tableau est clos ou si F_n est une variable propositionnelle, alors ce tableau est un tableau développé pour Σ. Sinon, on peut étendre toutes les branches ouvertes en appliquant les règles correspondantes à la formule F_n, et en développant les branches obtenues : le processus termine pour la même raison que pour $n = 1$. □

Bien entendu, à partir d'une racine donnée, il y a de nombreuses façons de construire un tableau développé.

Validité et complétude

La méthode précédente donne une méthode de preuve.

Définition *On dira qu'une formule F est* prouvable par tableau *s'il existe un tableau clos avec la racine $\{\neg F\}$. On notera dans ce cas $\vdash F$.*

Exercice *Prouver que A est une conséquence de $((A \vee \neg B) \wedge B)$ par la méthode des tableaux, i.e. $\vdash (((A \vee \neg B) \wedge B) \Rightarrow A)$.*

Exercice *Prouver que $\neg C$ est une conséquence de $((H \wedge (P \vee C)) \Rightarrow A) \wedge H \wedge \neg A \wedge \neg P)$ par la méthode des tableaux.*

La méthode est valide.

Théorème **(Validité)** *Toute formule prouvable est une tautologie.*

Démonstration : On dira qu'une branche B d'un tableau est *réalisable* s'il existe une valuation v telle que $v(A) = 1$ pour toute formule $A \in \bigcup B$ et $v(A) = 0$ si $\neg A \in \bigcup B$. Un tableau est dit *réalisable* s'il a une branche réalisable.

Il suffit de prouver le résultat suivant :

Lemme *Soit T' une extension immédiate du tableau T : c'est-à-dire le tableau obtenu en appliquant une règle α ou une règle β à T. Si T est réalisable alors T' aussi.*

Ce lemme suffit à prouver le théorème : si F est prouvable, alors il y a un tableau clos avec $\neg F$ comme racine. Cela veut dire que pour toute branche, il y a une formule A telle que A et $\neg A$ apparaissent sur cette branche, et donc aucune des branches de T n'est réalisable. Par le lemme, cela veut dire que l'on est parti initialement d'un arbre réduit au sommet étiqueté par $\neg F$ qui n'était pas réalisable. Autrement dit, F est une tautologie.

Il reste à prouver le lemme. Soit B une branche réalisable de T, et soit B' la branche de T qui est étendue dans T'. Si $B \neq B'$, alors B reste une branche réalisable de T. Si $B = B'$, alors B est étendue dans T',

1. soit en une branche B_α par l'application d'une règle α ;
2. soit en deux branches B_{β_1} et B_{β_2} par l'application d'une règle β.

Dans le premier cas, soit α la formule utilisée par la règle, et v une valuation réalisant B : de $v(\alpha) = 1$, on déduit $v(\alpha_1) = 1$ et $v(\alpha_2) = 1$: donc v est une valuation qui réalise B_α et le tableau T' est réalisable.

Dans le second cas, soit β la formule utilisée par la règle : de $v(\beta) = 1$, on déduit qu'au moins une des valeurs $v(\beta_1)$ et $v(\beta_2)$ vaut 1 : donc v réalise l'une des branches B_{β_1} et B_{β_2}, et le tableau T' est réalisable.

Complétude

La méthode est complète : en d'autres termes, la réciproque du théorème précédent est vraie.

Théorème **(Complétude)** *Toute tautologie est prouvable.*

Corollaire *Soit F une formule propositionnelle.*
F est une tautologie si et seulement si elle est prouvable.

Le reste de cette sous-section est consacré à prouver ce théorème.

Remarquons tout d'abord que si B est une branche à la fois développée et ouverte d'un tableau T, alors l'ensemble $\bigcup B$ de formules qui apparaissent dans B a les propriétés suivantes :

1. il n'y a aucune variable propositionnelle p telle que $p \in \bigcup B$ et telle que $\neg p \in \bigcup B$;
2. pour toute formule $\alpha \in \bigcup B$, $\alpha_1 \in \bigcup B$ et $\alpha_2 \in \bigcup B$;
3. pour toute formule $\beta \in \bigcup B$, $\beta_1 \in \bigcup B$ ou $\beta_2 \in \bigcup B$.

Lemme *Toute branche développée et ouverte d'un tableau est réalisable.*

Démonstration : Soit B une branche développée et ouverte d'un tableau T. On définit une valuation v par :

1. si $p \in \bigcup B$, $v(p) = 1$;
2. si $\neg p \in \bigcup B$, $v(p) = 0$;
3. si $p \notin \bigcup B$ et $\neg p \notin \bigcup B$, on pose (arbitrairement) $v(p) = 1$.

On montre par induction structurelle sur A que : si $A \in \bigcup B$, alors $v(A) = 1$, et si $\neg A \in \bigcup B$, alors $v(A) = 0$.

En effet, c'est vrai pour les variables propositionnelles.

Si A est une formule α, alors $\alpha_1 \in \bigcup B$ et $\alpha_2 \in \bigcup B$: par hypothèse d'induction, $v(\alpha_1) = 1$, $v(\alpha_2) = 1$, et donc $v(\alpha) = 1$.

Si A est une formule β, alors $\beta_1 \in \bigcup B$ ou $\beta_2 \in \bigcup B$: par hypothèse d'induction, $v(\beta_1) = 1$ ou $v(\beta_2) = 1$, et donc $v(\beta) = 1$.

Proposition *S'il existe un tableau clos avec $\neg A$ comme racine, alors tout tableau développé avec la racine $\neg A$ est clos.*

Démonstration : Par l'absurde : soit T un tableau ouvert et développé avec la racine $\neg A$, et B une branche ouverte de T. Par le lemme précédent, B est réalisable, et puisque $\neg A$ est dans B, $\neg A$ est satisfiable. A n'est donc pas une tautologie, et donc n'est pas prouvable par tableau : il n'y a donc pas de tableau clos avec la racine $\neg A$. □

On a enfin tous les ingrédients pour prouver le théorème

Supposons que A ne soit pas prouvable par tableau, et soit T un tableau développé avec la racine $\neg A$: T n'est pas clos. Comme dans la preuve précédente, si B est une branche ouverte de T, alors B est réalisable, et donc $\neg A$ est satisfiable : autrement dit, A n'est pas une tautologie.

Une conséquence du théorème de compacité

Définition *On dira qu'un ensemble Σ de formules est* réfutable par tableau *s'il existe un tableau clos avec la racine Σ.*

Corollaire *Tout ensemble Σ de formules qui n'est pas satisfiable est réfutable par tableau.*

Démonstration : Par le théorème de compacité, un ensemble de formules Σ qui n'est pas satisfiable possède un sous-ensemble fini Σ_0 qui n'est pas satisfiable. Cet ensemble fini de formules a une réfutation par tableau, i.e. il y a un tableau clos avec la racine Σ_0. Ce tableau donne aussi un tableau clos avec la racine Σ. $\square$

Exemples

On veut montrer que a est une conséquence de $(a \vee \neg b) \wedge b$ en logique classique propositionnelle. Par réfutation, il s'agit donc de montrer que $\{(a \vee \neg b) \wedge b, \neg a\}$ est insatisfiable. On démarre donc avec le tableau :

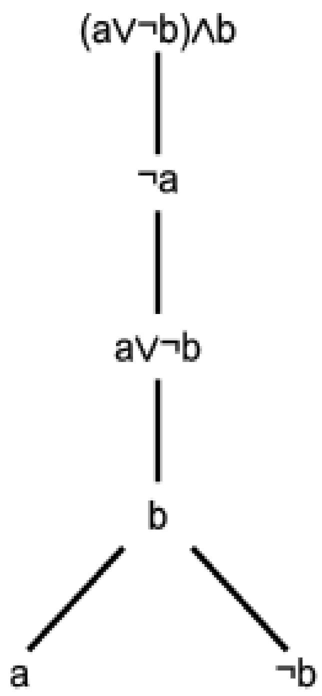
$$(a \vee \neg b) \wedge b$$

$$\neg a$$

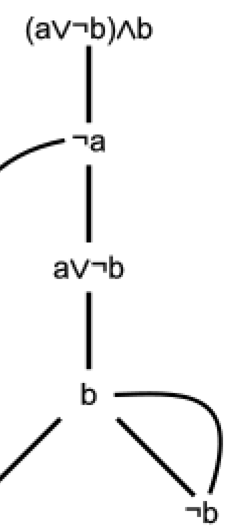
La première formule est de type α, on ajoute donc $a \vee \neg b$ et b sur la branche pour obtenir le tableau :

$$
\begin{array}{c}
(a \vee \neg b) \wedge b \\
| \\
\neg a \\
| \\
a \vee \neg b \\
| \\
b
\end{array}
$$

$a \vee \neg b$ est de type β, il faut donc créer deux branches, l'une contenant a, l'autre $\neg b$:

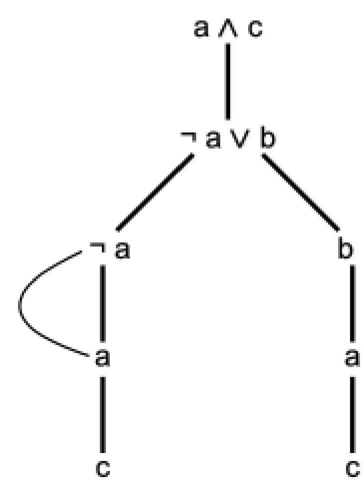


Les deux branches sont fermées : en effet, la première contient a et $\neg a$, et la seconde b et $\neg b$. On peut représenter ces fermetures de la façon suivante :



Par conséquent le tableau est fermé, l'ensemble de formule de départ est insatisfiable et a est une conséquence de $(a \vee \neg b) \wedge b$.

Si on part de l'ensemble de formules $\{a \wedge c, \neg a \vee b\}$, on obtient finalement le tableau suivant :



Ce tableau ne peut être fermé, donc l'ensemble de départ est satisfiable. En particulier, il est satisfait dans le modèle où a, b, c sont interprétées par vrai, comme le montre la branche de droite qui ne peut être fermée.

Premier exemple

Est-ce que l'énoncé
$(X \Rightarrow Y) \Rightarrow ((X \Rightarrow \neg Y) \Rightarrow \neg X)$
est valide?
C'est-à-dire vrai pour toutes affectations à X et Y

Exemple valide - 0

$$1 - F(X \Rightarrow Y) \Rightarrow ((X \Rightarrow \neg Y) \Rightarrow \neg X)$$

Préliminaire

Ajouter le signe F à l'énoncé

Exemple valide - 1

$\bigstar 1 - F(X \Rightarrow Y) \Rightarrow ((X \Rightarrow \neg Y) \Rightarrow \neg X)$
$2 - TX \Rightarrow Y$
$3 - F(X \Rightarrow \neg Y) \Rightarrow \neg X$

Règle

$F(A \Rightarrow B) \vdash TA \wedge FB$

Exemple valide - 2

$\surd 1 - F(X \Rightarrow Y) \Rightarrow ((X \Rightarrow \neg Y) \Rightarrow \neg X)$
$2 - TX \Rightarrow Y$
$\bigstar 3 - F(X \Rightarrow \neg Y) \Rightarrow \neg X$
$4 - TX \Rightarrow \neg Y$
$5 - F\neg X$

Règle

$F(A \Rightarrow B) \vdash TA \wedge FB$

Exemple valide - 3

$$
\begin{array}{l}
\surd 1 - F(X \Rightarrow Y) \Rightarrow ((X \Rightarrow \neg Y) \Rightarrow \neg X) \\
2 - TX \Rightarrow Y \\
\surd 3 - F(X \Rightarrow \neg Y) \Rightarrow \neg X \\
4 - TX \Rightarrow \neg Y \\
\bigstar 5 - F\neg X \\
6 - TX
\end{array}
$$

Règle

$F\neg A \vdash TA$

Exemple valide - 4

$\surd 1 - F(X \Rightarrow Y) \Rightarrow ((X \Rightarrow \neg Y) \Rightarrow \neg X)$

$\bigstar 2 - TX \Rightarrow Y$

$\surd 3 - F(X \Rightarrow \neg Y) \Rightarrow \neg X$

$4 - TX \Rightarrow \neg Y$

$\surd 5 - F \neg X$

$6 - TX$

$7 - FX$ $\qquad$ $8 - TY$

Règle

$T(A \Rightarrow B) \vdash FA \vee TB$

Exemple valide - 5

$\surd 1 - F(X \Rightarrow Y) \Rightarrow ((X \Rightarrow \neg Y) \Rightarrow \neg X)$
$\surd 2 - TX \Rightarrow Y$
$\surd 3 - F(X \Rightarrow \neg Y) \Rightarrow \neg X$
$4 - TX \Rightarrow \neg Y$
$\surd 5 - F\neg X$
$6 - TX$

$$\begin{array}{cc} \square 7 - FX & 8 - TY \end{array}$$

Fermeture de branche

Exemple valide - 6

$\surd 1 - F(X \Rightarrow Y) \Rightarrow ((X \Rightarrow \neg Y) \Rightarrow \neg X)$

$\surd 2 - TX \Rightarrow Y$

$\surd 3 - F(X \Rightarrow \neg Y) \Rightarrow \neg X$

$\bigstar 4 - TX \Rightarrow \neg Y$

$\surd 5 - F\neg X$

$6 - TX$

$\square 7 - FX$ $\quad$ $8 - TY$

$9 - FX$ $\quad$ $10 - T\neg Y$

Règle

$T(A \Rightarrow B) \vdash FA \vee TB$

Exemple valide - 7

$\surd 1 - F(X \Rightarrow Y) \Rightarrow ((X \Rightarrow \neg Y) \Rightarrow \neg X)$

$\surd 2 - TX \Rightarrow Y$

$\surd 3 - F(X \Rightarrow \neg Y) \Rightarrow \neg X$

$\surd 4 - TX \Rightarrow \neg Y$

$\surd 5 - F\neg X$

$6 - TX$

$\Box 7 - FX$ $\quad$ $8 - TY$

$\Box 9 - FX$ $\quad$ $10 - T\neg Y$

Fermeture de branche

Exemple valide - 8

$\sqrt{}1 - F(X \Rightarrow Y) \Rightarrow ((X \Rightarrow \neg Y) \Rightarrow \neg X)$
$\sqrt{}2 - TX \Rightarrow Y$
$\sqrt{}3 - F(X \Rightarrow \neg Y) \Rightarrow \neg X$
$\sqrt{}4 - TX \Rightarrow \neg Y$
$\sqrt{}5 - F\neg X$
$6 - TX$

$\square 7 - FX$ | $8 - TY$

$\square 9 - FX$ | $\bigstar 10 - T\neg Y$
$11 - FY$

Règle

$T\neg A \vdash FA$

Exemple valide - 9

$\surd 1 - F(X \Rightarrow Y) \Rightarrow ((X \Rightarrow \neg Y) \Rightarrow \neg X)$

$\surd 2 - TX \Rightarrow Y$

$\surd 3 - F(X \Rightarrow \neg Y) \Rightarrow \neg X$

$\surd 4 - TX \Rightarrow \neg Y$

$\surd 5 - F\neg X$

$6 - TX$

$\square 7 - FX$ $\quad$ $8 - TY$

$\square 9 - FX$ $\quad$ $\surd 10 - T\neg Y$

$\square 11 - FY$

Fermeture de branche

Exemple valide - 10

$\surd 1 - F(X \Rightarrow Y) \Rightarrow ((X \Rightarrow \neg Y) \Rightarrow \neg X)$
$\surd 2 - TX \Rightarrow Y$
$\surd 3 - F(X \Rightarrow \neg Y) \Rightarrow \neg X$
$\surd 4 - TX \Rightarrow \neg Y$
$\surd 5 - F\neg X$
$6 - TX$

$\square 7 - FX$ $\qquad$ $8 - TY$

$\square 9 - FX$ $\qquad$ $\surd 10 - T\neg Y$
$\square 11 - FY$

Toutes les branches sont fermées
$\Rightarrow$ La négation est impossible
$\Rightarrow$ L'énoncé est valide

Deuxième exemple

Est-ce que l'énoncé
$(X \Rightarrow Y) \Rightarrow ((\neg X \Rightarrow \neg Y) \Rightarrow Y)$
est valide?
C'est-à-dire vrai pour toutes affectations à X et Y

Exemple non-valide

$1 - F(X \Rightarrow Y) \Rightarrow ((\neg X \Rightarrow \neg Y) \Rightarrow Y)$
$2 - TX \Rightarrow Y$
$3 - F(\neg X \Rightarrow \neg Y) \Rightarrow Y$
$4 - T\neg X \Rightarrow \neg Y$
$5 - FY$

$6 - FX$ $\quad\quad$ $\square 7 - TY$

$8 - F\neg X$ $\quad\quad$ $9 - T\neg Y$
$\square 10 - TX$ $\quad\quad$ $\bigstar 11 - FY$

Résultat :

$1 \vdash 2, 3; 3 \vdash 4, 5; 2 \vdash 6, 7;$ ferme7; $4 \vdash 8, 9; 8 \vdash 10;$ ferme10; $9 \vdash 11$

Une branche n'est pas fermée

$\Rightarrow$ On a un contre-exemple $X = F, Y = F$

$\Rightarrow$ L'énoncé n'est pas valide