Méthodes directes de résolution de systèmes linéaires

Résolution théorique des systèmes linéaires

- On souhaite déterminer si un système linéaire de n équations à p inconnues admet des solutions :

$$\left\{\begin{array}{lcl} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & = & \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,n}x_n & = & b_n \end{array}\right.$$

- On note r le rang de la matrice associée au système. C'est encore l'ordre maximum d'un déterminant non nul extrait de A. Quitte à changer l'ordre des équations et des inconnues, on peut supposer que le déterminant non nul est donné par les r premières lignes et les r premières colonnes de la matrice. On note

$$D = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & \\ a_{2,1} & \ddots & & \\ \vdots & & & \\ & & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

- ce déterminant, appelé déterminant principal du système. Les inconnues x1,...,xr sont dites principales, comme les r premières équations, alors que les autres équations et inconnues sont dites auxiliaires. Les déterminants caractéristiques du système sont alors

$$D_s = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,r} & b_1 \\ a_{2,1} & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & & \\ a_{r,1} & & \cdots & a_{r,r} & b_r \\ a_{s,1} & & \cdots & a_{s,r} & b_s \end{vmatrix}$$

- où $r<s. Si un seul des déterminants caractéristiques est non nul, le système n'a pas de solutions. Sinon, il y a une solution unique si r=p, ou des solutions paramétrées par p-r variables sinon. On résume dans le tableau suivant, ce qui donne le théorème de Rouché-Fontené :

<table>
<tr><td colspan="2"></td><td>r=p</td><td>r<p</td></tr>
<tr><td colspan="2">r=n</td><td rowspan="2">Solution unique</td><td rowspan="2">Indétermination d'ordre p-r</td></tr>
<tr><td rowspan="2">r<n</td><td>déterminants caractéristiques tous nuls</td></tr>
<tr><td>un déterminant caractéristique non nul</td><td colspan="2">Impossible</td></tr>
</table>

Formules de Cramer

- Les déterminants permettent de résoudre les systèmes linéaires. On suppose donné le système de n équations à n inconnues suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & = & \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,n}x_n & = & b_n \end{array}\right.$$

- Ce système admet une unique solution si, et seulement si, le déterminant D du système est non nul, où D est donné par :

$$D = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & \\ a_{2,1} & \ddots & & \\ \vdots & & & \\ & & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

- On peut alors déterminer la valeur des inconnues xi par les formules suivantes, appelées formules de Cramer :

$$x_i = \frac{\begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \dots & a_{2,i-1} & b_2 & a_{2,i+1} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i+1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}}{D}$$

- Ces formules ne sont cependant jamais utilisées en pratique car elles conduisent à des calculs beaucoup plus longs que la méthode du pivot de Gauss.
- La résolution des systèmes linéaires par les déterminants a été entrevue par Leibniz au début du XVIIè siècle. C'est Gabriel Cramer qui a formalisé la règle précédente dans son ouvrage Introduction à l'analyse des lignes des courbes algébriques, publié en 1750.

Systèmes triangulaires

Supposons que nous voulons résoudre

$$Ux = b,$$

où U est une matrice triangulaire supérieure $n \times n$ inversible. On a alors, n équations sous la forme :

$$\begin{array}{ccccccccc} u_{11}x_1 & + & u_{12}x_2 & + & \cdots & + & u_{1n}x_n & = & b_1 \\ & & u_{22}x_2 & + & \cdots & + & u_{2n}x_n & = & b_2 \\ & & & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ & & & & & & u_{nn}x_n & = & b_n \end{array}.$$

(La matrice U est inversible si et seulement si les éléments de la diagonale sont non nuls.)

La n^{eme} équation dépend uniquement de l'inconnu x_n, on a

$$u_{nn}x_n = b_n, \text{ soit } x_n = \frac{b_n}{u_{nn}}.$$

La $(n-1)^{eme}$ équation

$$u_{n-1,n-1}x_{n-1} + u_{n-1,n}x_n = b_{n-1}$$

dépend uniquement de x_n et x_{n-1}, or, x_n est connu, d'où

$$x_{n-1} = \frac{1}{u_{n-1,n-1}}(b_{n-1} - u_{n-1,n}x_n).$$

Pour $k > 0$, x_k est déterminé de la même manière que les inconnus

$$x_n, x_{n-1}, \cdots, x_{k+1}$$

par

$$x_k = \frac{1}{u_{kk}}(b_k - u_{k,k+1}x_{k+1} - u_{k,k+2}x_{k+2} - \cdots - u_{k,n}x_n).$$

Pour tout $k = 1, \cdots, n$, le calcul de x_k nécessite une division, $n-k$ additions et $n-k$ multiplications. D'où, le nombre nécessaire d'opérations élémentaires pour résoudre par la méthode de remontée un système triangulaire est :

$$\begin{array}{l} n \text{ divisions} \\ (n-1)+(n-2)+\cdots+2+1 = \frac{n(n-1)}{2} \approx \frac{n^2}{2} \text{ additions} \\ (n-1)+(n-2)+\cdots+2+1 = \frac{n(n-1)}{2} \approx \frac{n^2}{2} \text{ multiplications} \end{array} .$$

Dans le cas d'un système linéaire triangulaire inférieure

$$Lx = b,$$

on utilise les mêmes techniques de la méthode de remontée, au lieu de commencer par l'inconnu x_n et on monte à x_1, on commence par x_1 puis on descend à x_n. On appelle cette procédure la méthode de descente.

Exercice d'application

Montrer en utilisant la méthode de remontée que l'inverse d'une matrice triangulaire $T = (t_{ij})$ inversible est une matrice triangulaire de même nature. De plus, les éléments de la diagonale de la matrice inverse sont les inverses des éléments de la diagonale de la matrice T. (Indication : la jième colonne de la matrice T^{-1} est égale à la solution du système triangulaire $Tx = e_j$ avec e_j est le jième vecteur de la base canonique.)

Méthode du pivot de Gauss

- La méthode du pivot de Gauss est une méthode pour transformer un système en un autre système équivalent (ayant les mêmes solutions) qui est triangulaire et est donc facile à résoudre. Les opérations autorisées pour transformer ce système sont :
- échange de deux lignes.
- multiplication d'une ligne par un nombre non nul.
- addition d'un multiple d'une ligne à une autre ligne.

- Prenons l'exemple suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcll} x+2y+2z & = & 2 & L_1 \\ x+3y-2z & = & -1 & L_2 \\ 3x+5y+8z & = & 8 & L_3 \end{array}\right.$$

- On conserve la ligne L1, qui sert de pivot pour éliminer l'inconnue x des autres lignes; pour cela, on retire L1 à L2, et 3 fois L1 à L3. On obtient :

$$\left\{\begin{array}{rcll} x+2y+2z & = & 2 & L_1 \\ y-4z & = & -3 & L_2 \\ -2z & = & -1 & L_3 \leftarrow L_3+L_2 \end{array}\right.$$

- On conserve alors la ligne L2 qui sert de pivot pour éliminer y de la troisième ligne; pour cela, on remplace la ligne L3 par L3+L2. On trouve :
-

$$\left\{\begin{array}{rcll} x+2y+2z & = & 2 & L_1 \\ y-4z & = & -3 & L_2 \\ -2z & = & -1 & L_3 \leftarrow L_3+L_2 \end{array}\right.$$

-
-
- Ce dernier système, triangulaire, est facile à résoudre : la dernière ligne donne z, en reportant, la deuxième ligne donne y, etc...

Décomposition LU

Si A est une matrice carrée de taille n, on appelle décomposition LU de A toute écriture de A sous la forme A=LU, où L est une matrice triangulaire inférieure avec des 1 sur la diagonale et U est une matrice triangulaire supérieure. On a les propriétés suivantes :

- Si A admet une décomposition LU, alors celle-ci est unique.
- A admet une décomposition LU si, et seulement si, ses mineurs principaux sont non nuls (rappelons que le mineur principal d'ordre k de A désigne le déterminant de la matrice obtenue à partir de A en extrayant les k premières lignes et colonnes).
- Si A est simplement supposée inversible, alors A peut s'écrire A=PLU, où P est une matrice de permutation.

Obtenir une décomposition LU d'une matrice A est important lorsqu'on souhaite résoudre plusieurs fois à la suite des systèmes linéaires du type Y=AX. Il suffit alors en effet de résoudre deux systèmes triangulaires.

L signifie "Lower", et U signifie Upper.

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ 0 & 0 & u_{33} & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & u_{44} \end{bmatrix}$$