Méthodes itératives de résolution de systèmes linéaires

Méthode de Jacobi

La méthode de Jacobi est une méthode itérative pour résoudre les systèmes linéaires $Ax = b$, où A est une matrice carrée d'ordre n et x, b sont des vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Elle consiste en la manipulation suivante : on décompose A comme $A = D - E - F$, où D est une matrice diagonale, $-E$ est une matrice triangulaire inférieure, et $-F$ est une matrice triangulaire supérieure.

$$\begin{pmatrix} & & -F \\ & D & \\ -E & & \\ & & \end{pmatrix}$$

On peut alors transformer le système en

$$Ax = b \iff Dx - (E+F)x = b \iff x = D^{-1}(E+F)x + D^{-1}b.$$

On définit ensuite une suite de vecteurs (x^k) par la formule

$$x^{k+1} = D^{-1}(E+F)x^k + D^{-1}b$$

et on espère que la suite (x^k) converge vers une solution de $Ax = b$. Sous de bonnes hypothèses concernant la matrice A, c'est effectivement le cas.

> **Théorème :** Si A est une matrice à diagonale dominante, alors la suite (x^k) converge vers l'unique solution de $Ax = b$.

Un raffinement de la méthode de Jacobi est la méthode de Gauss-Seidel.

Algorithme de Jacobi

$$\begin{cases} u^{(0)} & \text{donné} \\ u_i^{(k+1)} = \dfrac{b_i - \sum_{j\neq i} a_{ij} u_j^{(k)}}{a_{ii}} & \forall i = 1, \dots, n. \end{cases}$$

Méthode de Gauss-Seidel

La méthode de Gauss-Seidel est une méthode pour résoudre les systèmes linéaires Ax=b, où A est une matrice n×n et x,b sont des vecteurs de $\mathbf{R}^n$. Elle consiste en la manipulation suivante : on décompose A comme A=D-E-F, où D est une matrice diagonale, -E est une matrice triangulaire inférieure, et -F est une matrice triangulaire supérieure.

$$\begin{pmatrix} & & -F \\ & D & \\ -E & & \\ & & \end{pmatrix}$$

On peut alors transformer le système en

$$Ax = b \iff (D-E)x - Fx = b \iff x = (D-E)^{-1}Fx + (D-E)^{-1}b.$$

On définit ensuite une suite de vecteurs (x^k) par la formule

$$x^{k+1} = (D-E)^{-1}Fx^k + (D-E)^{-1}b$$

et on espère que la suite (x^k) converge vers une solution de Ax=b. Sous de bonnes hypothèses concernant la matrice A, c'est effectivement le cas.

Théorème : Si A est une matrice symétrique définie positive, alors la suite (x^k) converge vers l'unique solution de Ax=b.

Cette méthode appelle plusieurs commentaires. Le premier est qu'on peut se demander pourquoi on a besoin d'une méthode qui donne une solution approchée à une équation, alors qu'on dispose d'un algorithme (le pivot de Gauss) qui donne en un temps raisonnable (de l'ordre de n^3 opérations) une solution exacte. Il se trouve que le pivot de Gauss est numériquement instable. Les erreurs de calcul de l'ordinateur s'accumulent et font que la solution que l'on calcule est parfois très éloignée de la solution exacte. La convergence de la méthode de Gauss-Seidel est fondée sur le théorème du point fixe, et cette méthode a moins ce défaut.

Ensuite, il faut vérifier que la suite (x^k) est facilement calculable. Mais comme (D-E) est une matrice triangulaire inférieure, elle n'est pas du tout difficile à inverser, et on a la formule suivante pour calculer x^{k+1} :

$$\left\{\begin{array}{lllllllll} x_1^{k+1} & = & a_{1,1}^{-1}(& & -a_{1,2}x_2^k & -\ldots & -a_{1,n}x_n^k & +b_1) \\ x_2^{k+1} & = & a_{2,2}^{-1}(& -a_{2,1}x_1^{k+1} & & -\ldots & -a_{2,n}x_n^k & +b_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & & & \\ x_n^{k+1} & = & a_{n,n}^{-1}(& -a_{n,1}x_1^{k+1} & -a_{n,2}x_2^{k+1} & -\ldots & & +b_n) \end{array}\right.$$

Cette formule montre que la méthode de Gauss-Seidel est une amélioration de la méthode de Jacobi. Dans la méthode de Jacobi, la relation de récurrence est :

$$\left\{\begin{array}{lllllllll} x_1^{k+1} & = & a_{1,1}^{-1}(& & -a_{1,2}x_2^k & -\ldots & -a_{1,n}x_n^k & +b_1) \\ x_2^{k+1} & = & a_{2,2}^{-1}(& -a_{2,1}x_1^{k} & & -\ldots & -a_{2,n}x_n^k & +b_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & & & \\ x_n^{k+1} & = & a_{n,n}^{-1}(& -a_{n,1}x_1^{k} & -a_{n,2}x_2^{k} & -\ldots & & +b_n) \end{array}\right.$$

L'avantage de la méthode de Gauss-Seidel est que, pour calculer x_i^{k+1}, on utilise les valeurs déjà calculées de x_j^{k+1}, pour $j<i$, au lieu de x_j^k comme dans la méthode de Jacobi.

La méthode de Gauss-Seidel est un cas particulier des méthodes de relaxation.

Méthode de relaxation

La méthode de relaxation est une méthode itérative (utilisant des suites) pour résoudre les systèmes linéaires Ax=b, où A est une matrice n×n et x,b sont des vecteurs de $\mathbf{R}^n$. Elle consiste en la manipulation suivante : on décompose A comme A=D-E-F, où D est une matrice diagonale, -E est une matrice triangulaire inférieure, et -F est une matrice triangulaire supérieure:

$$\begin{pmatrix} & & -F \\ & D & \\ -E & & \\ & & \end{pmatrix}$$

Soit aussi ω un nombre réel non nul, appelé paramètre de la méthode de relaxation. La méthode de relaxation consiste à écrire le système sous la forme

$$Ax = b \iff \left(\frac{1}{\omega}D - E\right)x + \left(\frac{\omega - 1}{\omega}D - F\right)x = b \iff \left(\frac{1}{\omega}D - E\right)x = \left(\frac{1-\omega}{\omega}D + F\right)x + b$$

puis à définir une suite de vecteurs (x^k) par la formule

$$\left(\frac{1}{\omega}D - E\right)x^{k+1} = \left(\frac{1-\omega}{\omega}D + F\right)x^k + b$$

On espère alors que la suite (x^k) converge vers une solution de Ax=b. Sous de bonnes hypothèses concernant la matrice A et le réel ω, c'est effectivement le cas. Par exemple, si A est tridiagonale et définie positive, et si $0 < \omega < 2$, alors la suite (x^k) converge effectivement vers l'unique solution de Ax=b.

Lorsque $\omega = 1$, on retrouve la méthode de Gauss-Seidel.