

Systemes de déduction de la logique propositionnelle

1-Systeme à la Hilbert

Définition d'un système déductif

Un *calcul* ou un *système déductif* est, en logique, un ensemble de règles permettant en un nombre fini d'étapes et selon des règles explicites de déterminer si une proposition est vraie. Un tel procédé s'appelle une *démonstration*. On associe aussi aux propositions une structure mathématique qui permet de garantir que ces raisonnements ou démonstrations ont du sens, on dit qu'on lui a donné une sémantique. En calcul des propositions classique, cette sémantique n'utilise que deux valeurs, *vrai* et *faux* (souvent notées 1 et 0). Une proposition entièrement déterminée (c'est-à-dire dont les valeurs des constituants élémentaires sont déterminées) ne prend qu'une seule de ces deux valeurs.

Principales propriétés

Le fait que toute proposition soit démontrable si elle est une tautologie exprime une propriété du calcul propositionnel que l'on appelle la **complétude**, cela signifie que la présentation déductive du calcul propositionnel est équivalente à la présentation sémantique. La complétude repose sur les remarques suivantes.

- Toute proposition démontrée résulte d'un axiome ou de l'application d'une règle sur des propositions déjà démontrées. Or il est facile de vérifier que les axiomes fournissent des tautologies et que les règles conservent les tautologies. Toute proposition démontrée est donc une tautologie. Le calcul propositionnel est **correct**.
- La réciproque repose sur le fait suivant: on peut démontrer que pour toute proposition P du calcul propositionnel il existe une proposition P' telle que $P \leftrightarrow P'$ et telle que P' soit sous une forme dite normale $Q_1 \wedge Q_2 \wedge \dots \wedge Q_n$ où chaque Q_i est de la forme $R_1 \vee R_2 \vee \dots \vee R_k$, où chaque R_i est un littéral (c'est-à-dire une proposition de la forme p ou $\neg p$). Si P' est une tautologie, alors dans chaque Q_i , apparaissent nécessairement une variable propositionnelle p et sa négation $\neg p$. Sinon il existerait Q_i qui ne vérifierait pas cette condition et il serait possible d'attribuer des valeurs aux p_j de façon à donner la valeur 0 à Q_i , et donc à P' lui-même. Mais on peut montrer que $p \vee \neg p$ est démontrable ($\vdash p \vee \neg p$), puis qu'il en est de même de chaque Q_i , puis de P' lui-même et enfin de P . Toute tautologie est alors démontrable. Le calcul propositionnel est *complet*.

- Le calcul des propositions est **décidable**, dans le sens où il existe un algorithme permettant de décider si une proposition est un théorème ou non. Il suffit de dresser sa table de vérité et de voir s'il s'agit d'une tautologie.
- Le calcul des propositions est **cohérent** (consistant), c'est-à-dire non contradictoire. Il n'existe aucune proposition P telle qu'on puisse avoir en même temps $\vdash P$ et $\vdash \neg P$ car ces deux propositions seraient des tautologies et on aurait $1 = 0$.
- Le calcul des propositions est **fortement complet** (maximalement cohérent), dans le sens où tout ajout d'un nouveau schéma d'axiome, non démontrable dans le système initial, rend ce système incohérent.

- Le calcul des propositions est **décidable**, dans le sens où il existe un algorithme permettant de décider si une proposition est un théorème ou non. Il suffit de dresser sa table de vérité et de voir s'il s'agit d'une tautologie.
- Le calcul des propositions est **cohérent** (consistant), c'est-à-dire non contradictoire. Il n'existe aucune proposition P telle qu'on puisse avoir en même temps $\vdash P$ et $\vdash \neg P$ car ces deux propositions seraient des tautologies et on aurait $1 = 0$.
- Le calcul des propositions est **fortement complet** (maximalement cohérent), dans le sens où tout ajout d'un nouveau schéma d'axiome, non démontrable dans le système initial, rend ce système incohérent.

Systeme à la Hilbert

En logique, les systèmes à la Hilbert servent à définir les déductions formelles en suivant un modèle proposé par David Hilbert au début du xxe siècle : un grand nombre d'axiomes logiques exprimant les principales propriétés de la logique que l'on combine au moyen de quelques règles, notamment la règle de modus ponens, pour dériver de nouveaux théorèmes. Les systèmes à la Hilbert héritent du système défini par Gottlob Frege et constituent les premiers systèmes déductifs, avant l'apparition de la déduction naturelle ou du calcul des séquents, appelés parfois par opposition systèmes à la Gentzen.

1. $\frac{}{\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)}$ [implication-a]
2. $\frac{}{(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \eta)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \eta))}$ [implication-b]
3. $\frac{}{(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \varphi}$ [conjonction-a]
4. $\frac{}{(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \psi}$ [conjonction-b]
5. $\frac{}{\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow (\varphi \wedge \psi))}$ [conjonction-c]
6. $\frac{}{\varphi \rightarrow (\varphi \vee \psi)}$ [disjonction-a]
7. $\frac{}{\psi \rightarrow (\varphi \vee \psi)}$ [disjonction-b]
8. $\frac{}{(\varphi \rightarrow \eta) \rightarrow ((\psi \rightarrow \eta) \rightarrow ((\varphi \vee \psi) \rightarrow \eta))}$ [raisonnement par cas]
9. $\frac{}{(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow \neg\varphi)}$ [raisonnement par l'absurde]
10. $\frac{}{\neg\neg\varphi \rightarrow \varphi}$ [tiers exclus]
11. $\frac{\varphi \quad (\varphi \rightarrow \psi)}{\psi}$ [modus ponens]

Remarque 2 : Il existe une version simplifiée de la logique propositionnelle dans laquelle les connecteurs \wedge et \vee sont supprimés. On peut alors simuler $\varphi \vee \psi$ (resp. $\varphi \wedge \psi$) par $\neg\varphi \rightarrow \psi$ (resp. $\neg(\varphi \rightarrow \neg\psi)$). Cette version n'utilise plus que 4 règles :

1. $\frac{}{\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)}$ [implication-a]
2. $\frac{}{(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \eta)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \eta))}$ [implication-b]
3. $\frac{}{(\neg\psi \rightarrow \neg\varphi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)}$ [contraposée]
4. $\frac{\varphi \quad (\varphi \rightarrow \psi)}{\psi}$ [modus ponens]

(Théorème de déduction) Avec le calcul de Hilbert (simplifié ou non) on a, pour

tout ensemble de formules Γ et toutes formules ϕ et ψ sur une même signature :

$\Gamma \vdash (\phi \rightarrow \psi)$ si et seulement si $\Gamma \cup \{\phi\} \vdash \psi$

Preuve : *De gauche à droite :* On suppose que $\Gamma \vdash (\varphi \rightarrow \psi)$ et on veut prouver que $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$. Par monotonie, on a : $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash (\varphi \rightarrow \psi)$. Par introduction d'hypothèse on a : $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \varphi$. Il suffit alors d'appliquer la règle de modus ponens pour en déduire $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$.

De droite à gauche : On suppose que $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$ et on veut prouver que $\Gamma \vdash (\varphi \rightarrow \psi)$. Cela revient à prouver que pour tout $\psi \in Th(\Gamma \cup \{\varphi\})$ on a $\Gamma \vdash (\varphi \rightarrow \psi)$; on peut donc raisonner par induction sur la définition de l'ensemble $Th(\Gamma') = Th(\Gamma \cup \{\varphi\})$.

- Si $\psi \in \Gamma'$, alors
 - soit $\psi = \varphi$ et on a justement prouvé précédemment que $\Gamma \vdash (\varphi \rightarrow \varphi)$.
 - soit $\psi \in \Gamma$, donc $\Gamma \vdash \psi$ et en appliquant [implication-a] $\Gamma \vdash (\psi \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi))$ puis par modus ponens $\Gamma \vdash (\varphi \rightarrow \psi)$
- Sinon, ψ est obtenu par application d'une règle du calcul de Hilbert (simplifié ou non), et c'est donc soit un axiome ($\frac{}{\psi}$), soit le modus ponens ($\frac{\psi' \quad \psi' \rightarrow \psi}{\psi}$).
 - Si c'est un axiome alors $\Gamma \vdash \psi$ et on raisonne comme dans le cas où $\psi \in \Gamma$ précédent.
 - Si c'est le modus ponens, on prend donc pour hypothèses d'induction $\Gamma \vdash (\varphi \rightarrow \psi')$ d'une part et $\Gamma \vdash (\varphi \rightarrow (\psi' \rightarrow \psi))$ d'autre part, et l'on doit prouver $\Gamma \vdash (\varphi \rightarrow \psi)$. L'axiome [implication-a] donne $\Gamma \vdash (\varphi \rightarrow (\psi' \rightarrow \psi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi') \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi))$ et en appliquant deux fois le modus ponens on obtient $\Gamma \vdash (\varphi \rightarrow \psi)$

Ce qui termine la preuve du théorème de déduction.

Lemme: Tous les axiomes du calcul des propositions (simplifié ou non) sont des tautologies.

Lemme: Si $\Gamma \models \phi$ et $\Gamma \models (\phi \rightarrow \psi)$, alors $\Gamma \models \psi$.