Vecteurs et valeurs propres

Exemple 1

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & -5 & -2 \end{pmatrix}$, et les vecteurs $\boldsymbol{u} = (4,1,-3)$ et $\boldsymbol{v} = (3,1,-2)$.

Évaluer les produits $A\boldsymbol{v}$ et $A\boldsymbol{u}$. Qu'observe-t-on?

Exemple 1

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & -5 & -2 \end{pmatrix}$, et les vecteurs $\boldsymbol{u} = (4,1,-3)$ et $\boldsymbol{v} = (3,1,-2)$.

Évaluer les produits $A\boldsymbol{v}$ et $A\boldsymbol{u}$. Qu'observe-t-on?

$$A\boldsymbol{u}=\begin{pmatrix} 4 & 6 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & -5 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Exemple 1

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & -5 & -2 \end{pmatrix}$, et les vecteurs $\boldsymbol{u} = (4,1,-3)$ et $\boldsymbol{v} = (3,1,-2)$.

Évaluer les produits $A\boldsymbol{v}$ et $A\boldsymbol{u}$. Qu'observe-t-on?

$$A\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & -5 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

$$A\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & -5 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Exemple 1

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & -5 & -2 \end{pmatrix}$, et les vecteurs $\boldsymbol{u} = (4,1,-3)$ et $\boldsymbol{v} = (3,1,-2)$.

Évaluer les produits $A\boldsymbol{v}$ et $A\boldsymbol{u}$. Qu'observe-t-on?

$$A\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & -5 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

$$A\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & -5 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} Au = 1 \cdot u \\ Av = 2v \end{cases}$$

Exemple 1

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & -5 & -2 \end{pmatrix}$, et les vecteurs $\boldsymbol{u} = (4,1,-3)$ et $\boldsymbol{v} = (3,1,-2)$.

Évaluer les produits $A\boldsymbol{v}$ et $A\boldsymbol{u}$. Qu'observe-t-on?

$$A\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & -5 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

$$A\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & -5 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} Au = 1\,u \\ Av = 2\,v \end{cases}$$

Vecteurs propres de A.

Définition

Vecteur propre

Soit A une matrice carrée $n \times n$. Un vecteur $\boldsymbol{u} \neq \mathbf{0}$ est un vecteur propre de A s'il existe un scalaire λ tel que $A\boldsymbol{u} = \lambda\boldsymbol{u}$. Le scalaire λ est appelé valeur propre de la matrice A.

Scale : échelle

Définition

Vecteur propre

Soit A une matrice carrée $n \times n$. Un vecteur $\boldsymbol{u} \neq \mathbf{0}$ est un vecteur propre de A s'il existe un scalaire λ tel que $\boxed{A\boldsymbol{u} = \lambda\boldsymbol{u}}$ Le scalaire λ est appelé valeur propre de la matrice A.

$$Au = \lambda u \iff Au - \lambda u = 0$$
$$\iff (A - \lambda I)u = 0$$

Scale : échelle

Exemple 2

Trouver les vecteurs propres de la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & -5 & -2 \end{pmatrix}$ associés aux valeurs propres $\lambda = 1$ et $\lambda = 2$.

Pour $\boxed{\lambda = 1}$ on a $\boxed{(A - I)\boxed{u} = 0} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 6 & 6 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ -1 & -5 & -3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$.

(1) (2)

De (2), on a :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_2 + \frac{1}{3}x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - 2x_3 \\ x_2 = -\frac{1}{3}x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{4}{3}x_3 \\ x_2 = -\frac{1}{3}x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

pour $x_3 = 3 \Rightarrow \boxed{V_{\lambda=1} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}}$

Exemple 2

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & -5 & -2 \end{pmatrix}.$$

Pour $\boxed{\lambda = 2}$ on a $\boxed{(A - 2I)\boxed{u} = 0} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 6 & 6 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & -5 & -4 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$

(1) (2)

De (2), on a :

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -3x_2 - 3x_3 \\ x_2 = -\frac{1}{2}x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{3}{2}x_3 \\ x_2 = -\frac{1}{2}x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

pour $x_3 = 2 \Rightarrow \boxed{V_{\lambda=2} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}}$

Exemple 3

Déterminer les vecteurs propres de la matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -7 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\boxed{P_A(\lambda) =} \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 0 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ -7 & 1 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 12\lambda + 8$$

$$= \boxed{-(\lambda - 2)^3}$$

$P_A(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda = 2$

Exemple 3

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -7 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour $\boxed{\lambda = 2}$, on a $\boxed{(A - 2I)\boxed{u} = 0} \Leftrightarrow \underset{(1)}{\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -7 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right)} \sim \underset{(2)}{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)}.$

De (2), on a :

$$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{3}x_3 = 0 \\ x_2 + \frac{1}{3}x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{3}x_3 \\ x_2 = -\frac{1}{3}x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

pour $x_3 = 3 \Rightarrow \boxed{V_{\lambda=2} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}}$

Exercice

Déterminer les vecteurs propres associés aux valeurs propres de la matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$.

Méthode des puissances

Une méthode bien connue et utilisée pour calculer une valeur propre et est la méthode des puissances. La suite

$$\frac{x}{||x||}, \frac{Ax}{||Ax||}, \frac{A^2x}{||A^2x||}, \cdots$$

converge, dans certaines conditions, vers le vecteur propre principal associée à la valeur propre maximale en valeur absolue.

Méthode des puissances.
Data: une matrice A carrée avec une valeur propre dominante réelle
Result: Un vecteur propre v et une valeur propre λ
$v^{(0)}$ un vecteur de norme 1;
for $k = 1$ **to**... **do**
  $w = Av^{(k-1)}$;
  $v^{(k)} = w/||w||$;
  $\lambda^{(k)} = {}^t v^{(k)} A v^{(k)}$;
end

Cet algorithme ne convergera si la valeur propre dominante n'est pas unique (par exemple si on a une paire de valeurs propres complexes), ou si le vecteur initial $v^{(0)}$ est orthogonal avec le vecteur propre recherché. C'est la première méthode itérative qu'on voit, mais cette méthode n'est pas très efficace. Voyons à quelle vitesse on converge. On suppose que A est diagonalisable et a des valeurs propres $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \ldots \geq |\lambda_m|$. Alors A se décompose en valeurs propres $A = XDX^{-1}$, avec x_1 le vecteur propre associé à la plus grande valeur propre λ_1.

$$\begin{aligned}
v^{(k)} &= c_k A^k v^{(0)}, \\
&= c_k (XDX^{-1})^k v^{(0)}, \\
&= c_k X D^k X^{-1} v^{(0)}, \\
&= c_k \lambda^k X \mathrm{diag}\,[1, \lambda_2/\lambda_1, \ldots, \lambda_m/\lambda_1] X^{-1} v^{(0)},
\end{aligned}$$

Quand $k \to \infty$, le terme $X \mathrm{diag}\,[1, \lambda_2/\lambda_1, \ldots, \lambda_m/\lambda_1] X^{-1} v^{(0)}$ converge vers

$$\begin{aligned}
X \mathrm{diag}\,[1, 0, \ldots, 0] X^{-1} v^{(0)} &= X \begin{pmatrix} {}^t x_1 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} v^{(0)}, \\
&= X \begin{pmatrix} {}^t x_1 v^{(0)} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \\
&= {}^t x_1 v^{(0)} x_1.
\end{aligned}$$

On obient donc que la convergence du vecteur propre se fait en $O(|\lambda_2/\lambda_1|^k)$. La convergence du quotient de Rayleigh se fait en $O(|\lambda_2/\lambda_1|^{2k})$.